Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

4.1.2 Existenzaussagen und Allaussagen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

5. Führe in den folgenden Aussageformen die angegebenen Ersetzungen durch und entscheide, ob sie zu einer wahren oder falschen Aussage führen.

a) $\frac{7}{3}x - 2 = -1$; $x \in \{0, 1, \frac{3}{7}, \frac{7}{3}, -3\}$

b) $7{,}5 - x < 2x$; $x \in \{-2, -\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 100\}$

•**c)** $\dfrac{\frac{x}{3} + \frac{x}{5}}{\frac{x}{3} - \frac{x}{5}} = 2x$; $x \in \{3, -5, 2\}$

d) $(x-3) \cdot (x+5) > 0$; $x \in \{-4, -6, 0\}$

e) x ist Teiler von 360; $x \in \{1, 2, \ldots, 10\}$

6. Gib zu den gegebenen Grundmengen die Lösungsmenge der folgenden Aussageformen an.

a) $x < 5$; $G = \mathbb{N}_0$

b) $z^2 < 5$; **1)** $G = \mathbb{N}_0$ **2)** $G = \mathbb{Z}$

c) $\frac{1}{10} \leq \frac{2}{n} < \frac{1}{3}$; $G = \mathbb{N}$

•**d)** t ist Teiler von 36; **1)** $G = \mathbb{N}_0$
2) $G =$ Menge aller Primzahlen

e) n ist teilerfremd* zu 18; $G = \{1, 2, 3, \ldots, 17\}$

⁝**f)** $\mathrm{ggT}(36; x) = 4$; $G = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

⁝**g)** $\mathrm{kgV}(y; 18) = 72$; $G = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

•**7.** Gib die Lösungsmenge bezüglich der Grundmenge $\mathbb{Z}$ an.

a) $x - x = 0$ **b)** $x - 2x = 0$

c) $x - 1 = x$ **d)** $\frac{x}{x} = 1$ **e)** $\frac{x}{x} = 0$

8. Bestimme die Lösungsmenge bezüglich der Grundmenge $\mathbb{Z}$.

a) $|x| = 4$ **b)** $|x| = -4$ **c)** $|x| < 4$

d) $|x| > 4$ •**e)** $|x| = x$ ⁝**f)** $|x| = -x$

4.1.2 Existenzaussagen und Allaussagen

Wir haben oben eine Möglichkeit kennengelernt, wie man aus Aussageformen Aussagen gewinnt, nämlich dadurch, daß man alle Variablen durch geeignete Zahlen (oder gegebenenfalls auch Wörter) ersetzt. Es gibt aber noch eine zweite Möglichkeit, aus Aussageformen Aussagen zu machen.
$x + 0 = x$ ist eine Aussageform, ihre Lösungsmenge ist $\mathbb{Q}$. Diesen Sachverhalt können wir auch so ausdrücken:
Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt: $x + 0 = x$.

* *Beachte:* 2 Zahlen heißen **teilerfremd**, wenn ihr ggT gleich 1 ist.

Dieser Satz enthält zwar eine Variable, ist aber keine Aussageform mehr, weil durch den vorangestellten Redeteil »Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt:« entscheidbar wird, ob der Satz wahr oder falsch ist; d.h., der Satz ist eine Aussage.
Man kann noch durch einen zweiten Redeteil eine Aussageform zu einer Aussage machen, nämlich durch »Es gibt ein $x \in \mathbb{Q}$, so daß ...«.
Zum Beispiel erhält man aus der Aussageform $x^2 = 9$ die Aussage:
Es gibt ein $x \in \mathbb{Q}$, so daß $x^2 = 9$.
Diese Aussage ist wahr, weil z.B. $(-3)^2 = 9$.
Allgemein legen wir fest:

Definition 118.1: Eine Aussage, die den Redeteil »Es gibt ein ...« bzw. »Es existiert ein ...« enthält, heißt **Existenzaussage**. Eine Aussage, die den Redeteil »Für alle ...« enthält, heißt **Allaussage**.

All- und Existenzaussagen können natürlich auch falsch sein:
»Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt $x + 1 = 5$« ist falsch, weil z.B. $2 + 1 = 5$ falsch ist.
»Es gibt ein $x \in \mathbb{Q}$, so daß $x + 1 = x$« ist falsch, weil für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt, daß $x + 1 > x$ ist.
Die wichtigsten Beispiele für wahre All- und Existenzaussagen sind die Rechengesetze für die rationalen Zahlen, wie z.B. das Kommutativgesetz der Addition, das ausführlich geschrieben so lautet:
Für alle $a \in \mathbb{Q}$ und alle $b \in \mathbb{Q}$ gilt $a + b = b + a$.

Aufgaben

•**1.** Entscheide bei den folgenden Aussagen, ob sie wahr sind.
a) Für alle $a \in \mathbb{Q}$ gilt: $a - a = a$.
b) Für alle $y \in \mathbb{Q}$ gilt: $y^2 > 0$.
c) Für alle $n \in \mathbb{N}$: $2n > n$.
d) Für alle $x \in \mathbb{Q}$: $2x > x$.

•**2.** Entscheide bei den folgenden Aussagen, ob sie wahr sind.
a) Es gibt ein $a \in \mathbb{Q}$, so daß $7a = a$.
b) Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $n < 1$.
c) Es gibt ein $z \in \mathbb{Z}$: $z < 1$.
d) Es gibt ein $u \in \mathbb{Q}$: $u^2 < 0$.