Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

4.2 Lösen von Gleichungen

4.2 Lösen von Gleichungen

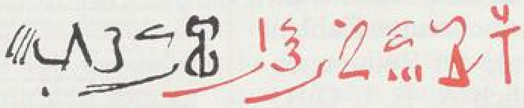
4.2.1 Gleichung als Information über eine unbekannte Zahl

4.2.1.1 Ein historisches Beispiel

Der Hyksoskönig* A'User-re Apophis (um 1590–um 1550 v. Chr.) herrschte schon seit 33 Jahren über Ägypten. Im 4. Monat der Überschwemmungsjahreszeit dieses 33. Regierungsjahres schrieb Ahmose** auf eine Papyrusrolle*** ein altes Buch der Mathematik ab, das aus der Zeit des Königs Amenemhet III. (1842–1794 v. Chr.) stammte.**** Die Rolle wurde im 19. Jh. wieder aufgefunden und im Jahre 1858 in Luxor an den schottischen Juristen Alexander Henry Rhind (1833–1863) verkauft. Sie ist 33 cm breit und 5,34 m lang und beidseitig beschrieben (Abb. 113). Der Text der Rolle – sie heißt heute *Papyrus Rhind* – beginnt mit einer großen Versprechung:
»Regeln zur Erforschung aller Dinge, zur Erkenntnis alles Seienden, aller dunklen Geheimnisse«.

Abb. 119.1 Papyrusrolle (um 1250 v. Chr.) Kairo, Ägyptisches Museum

Dann kommen Divisionstabellen, an die sich 84 Aufgaben anschließen. Diese entschleiern zunächst das Geheimnis der Zahlen und der Bruchrechnung, dann lösen sie Probleme aus der Geometrie und der Lehre von den Körpern, und schließlich beschäftigen sie sich mit Fragen aus der Landwirtschaft. Aufgabe 24 – man liest den Text von rechts nach links – lautet:



Übersetzung: Haufen, sein Siebentel zu ihm, es macht 19.
Gemeint war: Ein Siebentel einer unbekannten Zahl wird zu dieser Zahl hinzugefügt; man erhält dann 19.

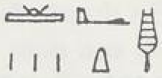
* Hyksos bedeutet »Fürst aus der Fremde«. Mit diesem Wort bezeichneten die ägyptischen Geschichtsschreiber später die aus Westasien stammenden fremden Herrscher, die Ägypten von ca. 1650–ca. 1540 v. Chr. regiert hatten.

** sprich Achmose, zu deutsch *Mondgeborener*. Oft liest man auch die gräzisierte Form Ahmes.

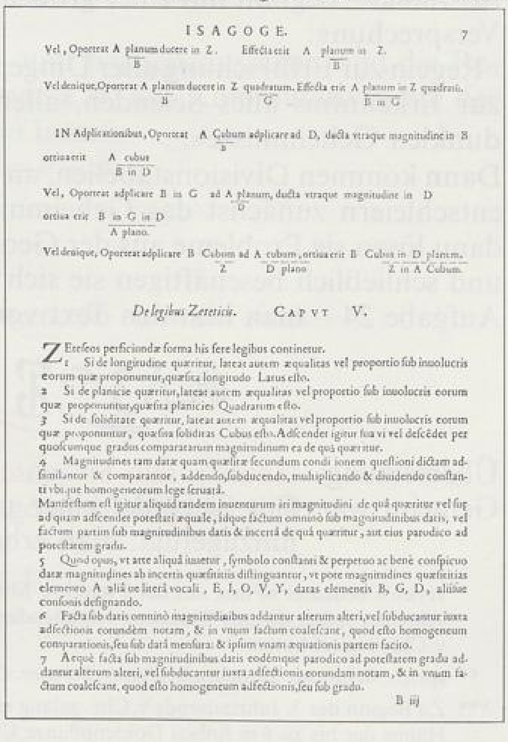
*** Zu Beginn des 3. Jahrtausends v. Chr. gelang es den Ägyptern, aus dem faserigen Mark des dreieckigen Halms der bis zu 6 m hohen Doldenpflanze Cyperus papyrus, die in den Sumpfgebieten wuchs, einen Beschreibstoff herzustellen, der das Leder verdrängte. Wegen des hohen Verbrauchs wurde die Papyrusstaude immer seltener, so daß sich König Eumenes I. (263–241 v. Chr.) von Pergamon genötigt sah, feingegerbtes Leder wieder als Schreibmaterial zu verwenden, das sog. Pergament. Die Papyrusstaude ist heute in Ägypten ausgerottet.

**** Der Pharao Amenemhet III. war so klug, von den Bürgern nur die Steuern zu verlangen, die sie auch aufbringen konnten. Dazu ließ er jedes Jahr den höchsten Pegelstand des Nils messen und daraus die zu erwartende Ernte berechnen. Dann erst setzte er die Jahressteuern fest.

4.2.1.2 Die Unbekannte

Die Ägypter waren vermutlich die ersten, die für eine unbekannte Zahl eine eigene Bezeichnung verwendeten. Im *Papyrus Rhind* schrieben sie dafür  – in Hieroglyphen* . Ausgesprochen wurde dieses Wort »aha«; seine Bedeutung war eigentlich *Haufen*.
Es war sicherlich ein ganz großer Einfall in der Entwicklung der Mathematik, für eine Zahl, die man noch gar nicht kennt, ein eigenes Wort zu verwenden. Denn nun konnte man, da sie ja einen Namen hatte, von ihr reden, mit ihr Überlegungen, ja sogar Rechnungen ausführen.
Diese großartige Idee taucht auch bei den Babyloniern und bei den Indern auf, im 4. Jh. v. Chr. finden wir sie bei griechischen Mathematikern. THYMARIDAS nennt die gesuchte Zahl genauso, wie wir es heute machen, nämlich *unbekannt* ἀόριστον (aóriston). Bei AL-CHARIZMI (um 780–nach 847) heißt die unbekannte Zahl شيء = *schai* = *ein Etwas*.

Nun haben wir oben auf Seite 15 gesehen, daß es sich immer mehr eingebürgert hatte, bekannte Zahlen durch Buchstaben wiederzugeben, wenn man allgemeine Rechenregeln angeben oder einen allgemeingültigen Rechenweg beschreiben wollte. Was lag also näher, als auch für die unbekannte Zahl einen Buchstaben zu verwenden? Aber welchen? Recht einleuchtend ist eigentlich die Idee von François VIÈTE (1540–1603), der 1591 vorschlug, für die unbekannte Zahl den Vokal A zu verwenden, und, falls es mehrere unbekannte Zahlen gibt, eben die Vokale der Reihe nach zu benützen, nämlich A, E, I, O, U und Y. Bekannte Zahlen sollten durch Konsonanten bezeichnet werden, also durch B, G, D usw. (Siehe Abbildung 120.1, Nr. 5.)
Durchgesetzt hat sich aber eine Schreibweise, die 1637 der große französische Philosoph und Mathematiker René DESCARTES (1596 bis 1650) ohne weitere Begründung im Abschnitt *La Géométrie* seines *Discours de la méthode* einführte.


ISAGOGE. 7

Vel, Oporteat A $\frac{\text{planum}}{B}$ ducere in Z. Effecta erit A $\frac{\text{planum in Z}}{B}$.

Vel denique, Oporteat A $\frac{\text{planum}}{B}$ ducere in Z $\frac{\text{quadratum}}{G}$. Effecta erit A $\frac{\text{planum in Z quadratū}}{B \text{ in } G}$.

IN Adplicationibus, Oporteat A $\frac{\text{Cubum}}{B}$ adplicare ad D, ducta vtraque magnitudine in B orietur erit $\frac{A \text{ cubus}}{B \text{ in } D}$

Vel, Oporteat adplicare B in G ad A $\frac{\text{planum}}{D}$, ducta vtraque magnitudine in D ortiua erit $\frac{B \text{ in } G \text{ in } D}{A \text{ plano}}$.

Vel denique, Oporteat adplicare B $\frac{\text{Cubum}}{Z}$ ad A $\frac{\text{cubum}}{D \text{ plano}}$, ortiua erit $\frac{B \text{ Cubus in } D \text{ planum}}{Z \text{ in } A \text{ Cubum}}$.

De legibus Zeteticis. CAPVT V.

ZEteſeos perficiendæ forma his fere legibus continetur.
1 Si de longitudine quæritur, lateat autem æqualitas vel proportio ſub inuolucris eorum quæ proponuntur, quæſita longitudo Latus eſto.
2 Si de planicie quæritur, lateat autem æqualitas vel proportio ſub inuolucris eorum quæ proponuntur, quæſita planicies Quadratum eſto.
3 Si de ſoliditate quæritur, lateat autem æqualitas vel proportio ſub inuolucris eorum quæ proponuntur, quæſita ſoliditas Cubus eſto. Adſcendet igitur ſua vi vel deſcēdet per quoſcumque gradus comparatarum magnitudinum ea de quâ quæritur.
4 Magnitudines tam datæ quam quæſitæ ſecundum conditionem queſtioni dictam adſimilantor & comparantor, addendo, ſubducendo, multiplicando & diuidendo conſtanti vbique homogeneorum lege ſeruatâ.
Manifeſtum eſt igitur aliquid tandem inuenturum iri magnitudini de quâ quæritur vel ſuę ad quam adſcendet poteſtati æquale, idque factum omninò ſub magnitudinibus datis, vel factum partim ſub magnitudinibus datis & incertâ de quâ quæritur, aut eius parodico ad poteſtatem gradu.
5 Quod opus, vt arte aliquâ iuuetur, ſymbolo conſtanti & perpetuo ac benè conſpicuo datæ magnitudines ab incertis quæſititiis diſtinguantur, vt pote magnitudines quæſititias elemento A aliâue literâ vocali, E, I, O, V, Y, datas elementis B, G, D, aliiſue conſonis deſignando.
6 Facta ſub datis omninò magnitudinibus addantur alterum alteri, vel ſubducantur iuxta adfectionis eorundem notam, & in vnum factum coaleſcant, quod eſto homogeneum comparationis, ſeu ſub datâ menſura: & ipſum vnam æquationis partem facito.
7 Aequè facta ſub magnitudinibus datis eodémque parodico ad poteſtatem gradu addantur alterum alteri, vel ſubducantur iuxta adfectionis eorundem notam, & in vnum factum coaleſcant, quod eſto homogeneum adfectionis, ſeu ſub gradu.
B iij

Abb. 120.1 Seite 7r der *In artem analyticem Isagoge* (1591) des François VIÈTE (1540–1603)

* Entstanden aus den griechischen Wörtern ἱερός (hierós) = *heilig* und γλύφειν (glýphein) = *einmeißeln*. Sprich hi-erós, Hi-eroglyphe.

Abb. 121.1 René DESCARTES, latinisiert zu CARTESIUS (31.3.1596 La Haye-Descartes/Touraine – 11.2.1650 Stockholm)

Er bezeichnete die unbekannten Zahlen mit x, y und z, die bekannten dagegen mit den ersten Buchstaben des Alphabets, also mit a, b, c usw. *Wir* wollen es genauso halten!
Falls du mehr über die geschichtliche Entwicklung wissen willst, dann lies weiter!

Die BABYLONIER (um 1800 v. Chr.) nannten die unbekannte Zahl = *usch* = *Länge*, die INDER (vor 300 v. Chr.) यावत् तावत् = *yavat-tavat* = *wieviel-soviel.* Erst um 250 n. Chr. kamen griechische Mathematiker, unter ihnen DIOPHANT, (siehe Aufgabe 166/**15**), auf die Idee, für die unbekannte Zahl, die sie kurz *Zahl* = ἀριθμός (arithmós) nannten, eine Abkürzung einzuführen, nämlich ς', über deren Entstehung heute noch die Gelehrten streiten. Die einen meinen, sie sei der letzte Buchstabe von ἀριθμός, zusammen mit einem Akzent. Andere hingegen meinen, das Zeichen sei eine Verschmelzung der beiden ersten Buchstaben dieses Worts. Wie dem auch sei, die Abkürzung war erfunden! Fast 400 Jahre später – wir wissen es sogar ganz genau, es war im Jahre 628 – kam auch in Indien jemand auf die Idee, das lange *yavat-tavat* abzukürzen: In seinem in Versen abgefaßten Mathematiklehrbuch schrieb BRAHMAGUPTA (um 598 bis nach 665) einfach या = *ya* dafür.

Die ARABER lernten von den Indern die Mathematik, und die EUROPÄER des Mittelalters lernten sie bei den Arabern. Da das *schai* des AL-CHARIZMI im Arabischen auch *Sache* bzw. *Ding* heißt, übersetzte man es mit dem lateinischen *res*, gelegentlich auch mit *causa*, woraus im 15. Jh. das italienische *cosa* wurde. Daraus wurde im Deutschen *Coß* als Bezeichnung für das, was wir heute *Algebra* nennen.

Bis zum x für die Unbekannte war aber noch ein langer Weg. Einige Araber kürzten das *schai* mit s ab, LUCA PACIOLI (um 1445–1517) mit *co.* seine *cosa.* Das tat man auch in Deutschland, so z. B. in den vor 1486 geschriebenen Abhandlungen, die im *Codex Dresden C80* zusammengebunden sind: Der Verfasser der *Deutschen Algebra* von 1481 schreibt ꝯ für *cosa*, der der *Lateinischen Algebra* zunächst, das ist ein c und ein o, das in ein Schwänzchen ausläuft. Immer mehr aber krümmt er sein c nach links und gibt ihm schließlich sogar eine Spitze: . Den Plural *cosae* kennzeichnet er durch ein kleines hochgestelltes e: . In der Form führt es Christoff RUDOLFF (um 1500–vor 1543) in seiner 1525 gedruckten *Coß* als Symbol für die Unbekannte ein. Er liest es aber – wie andere auch – als *radix*, vermutlich, weil es einem handschriftlichen r ähnelt, vor allem aber, weil GERHARD VON CREMONA (1114–1187) mit *radix* das arabische *dschidr* (= Wurzel) übersetzt hat, das AL-CHARIZMI auch für die unbekannte Größe verwendete.* Gelegentlich wurde es übrigens auch *res* gele-

* Siehe Lösungsheft Seite 4 f.

sen.* Vor allem durch die *Arithmetica integra* (1544) Michael STIFELS (1487?–1567) fand 2ϱ seine Verbreitung. DESCARTES hat es noch benutzt, doch 1637 entschied er sich anders: das x als Zeichen für die Unbekannte war geboren.

Mit der Schreibweise von DESCARTES lautet die Aufgabe 24 des *Papyrus Rhind*

$$x + \tfrac{1}{7}x = 19\,.$$

Diese Gleichung stellt eine Information über eine unbekannte Zahl x dar. Unsere Aufgabe besteht nun darin, auf Grund dieser Information die Zahl x zu entlarven. Da man annimmt, daß durch eine solche Information die unbekannte Zahl x bestimmt ist, nennt man eine solche Gleichung auch **Bestimmungsgleichung** für x. Zahlen, die für x in Frage kommen, heißen **Lösungen** der Gleichung.
Die Methoden, die zur Bestimmung von x, d.h. zur Lösung der Gleichung führen, werden wir im Abschnitt **4.2.2** kennenlernen.

Aufgaben

1. Schreibe als Bestimmungsgleichung für x die folgenden Aufgaben aus dem *Papyrus Rhind:*
   a) *Aufgabe 25*: Haufen, seine Hälfte zu ihm, es macht 16.
   b) *Aufgabe 26*: Haufen, sein Viertel zu ihm, es macht 15.
   c) *Aufgabe 27*: Haufen, sein Fünftel zu ihm, es macht 21.

2. Im Museum der Schönen Künste in Moskau wird ein mathematischer Papyrus aufbewahrt, der noch etwas älter als der *Papyrus Rhind* ist. Er heißt *Moskauer Papyrus*. Er ist nur 8 cm breit und 5,44 m lang und enthält 25 Probleme, von denen allerdings die meisten fast unleserlich sind.
Schreibe als Bestimmungsgleichung für x die folgenden Aufgaben aus dem *Moskauer Papyrus*:
   a) *Problem 25*: Haufen, zweimal genommen, und noch ein Haufen, es ergibt 9.
   b) *Problem 19*: Haufen, eineinhalb davon, zusammen mit 4, es ergibt 10.

3. Ich denke mir eine Zahl, vervierfache sie und subtrahiere dann 6. Wenn ich das Ergebnis halbieren, erhalte ich 10.
Schreibe eine Bestimmungsgleichung für die gedachte Zahl z an.

4.2.1.3 Die Gleichung als Aussageform

$x + \frac{1}{7}x = 19$ ist ein Satz, der eine Variable enthält; also ist er nach Definition 115.1 eine Aussageform. Deuten wir eine Bestimmungsgleichung als Aussageform, so besteht unsere Aufgabe darin, alle Zahlen zu finden, durch die man die Variable x ersetzen kann, so daß dabei aus der Aussageform eine *wahre* Aussage wird. Kurz, wir suchen die Lösungsmenge L der Aussageform.
Im *Papyrus Rhind* wird behauptet, die Lösungsmenge der Aussageform $x + \frac{1}{7}x = 19$ sei $\{16\frac{5}{8}\}$.

* Andere Wissenschaftler meinen aber, 2ϱ sei ursprünglich aus dem Worte *res* entstanden, dann aber doch als *cosa* gelesen worden.

4.2.1.4 Die Probe

Wenn man eine Zahl gefunden hat, von der man vermutet, daß sie eine Lösung der Gleichung ist, dann kann man diese Vermutung durch eine Probe bestätigen oder widerlegen. Dazu ersetzt man die Variable x durch die gefundene Zahl und berechnet *getrennt* die **linke Seite** und die **rechte Seite** der Gleichung. Dabei versteht man unter *linker Seite* einer Gleichung denjenigen Term, der links vom Gleichheitszeichen steht. Wir schreiben dafür kurz LS. Der rechts vom Gleichheitszeichen stehende Term heißt *rechte Seite*, kurz RS. Machen wir also in $x + \frac{1}{7}x = 19$ die Probe für $x = 16\frac{5}{8}$:

$$\begin{aligned} \text{LS} &= 16\tfrac{5}{8} + \tfrac{1}{7} \cdot 16\tfrac{5}{8} = \qquad\qquad \text{RS} = 19. \\ &= 16\tfrac{5}{8} + \tfrac{1}{7} \cdot \tfrac{133}{8} = \\ &= 16\tfrac{5}{8} + \tfrac{19}{8} = \\ &= 16\tfrac{5}{8} + 2\tfrac{3}{8} = \\ &= 19. \end{aligned}$$

Wir stellen fest: LS = RS, also ist $16\frac{5}{8}$ eine Lösung der Gleichung $x + \frac{1}{7}x = 19$, was man kurz durch $16\frac{5}{8} \in L$ ausdrücken kann.
Schon im *Papyrus Rhind* ist diese Probe ausgeführt!

Aufgaben

1. *Aufgabe 28* des *Papyrus Rhind* lautet in moderner Form
$(x + \frac{2}{3}x) - \frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x) = 10.$
AHMOSE gibt als Lösung $x = 9$ an. Mach die Probe!

2. *Aufgabe 30* des *Papyrus Rhind* lautet in moderner Form
$\frac{2}{3}x + \frac{1}{10}x = 10.$
AHMOSE gibt als Lösung $x = 13\frac{1}{23}$ an. Mach die Probe!

3. *Aufgabe 29* des *Papyrus Rhind* lautet in moderner Form
$\frac{1}{3}[x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x)] = 10.$
AHMOSE gibt als Lösung $x = 13\frac{1}{2}$ an. Mach die Probe!

•4. *Aufgabe 32* des *Papyrus Rhind* lautet in moderner Form
$x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 2.$
AHMOSE gibt als Lösung $x = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{114} + \frac{1}{228}$ an.* Mach die Probe!

5. Für die Bestimmungsgleichung $1\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = \frac{3}{8} + \frac{2}{3}x$ werden die Zahlen 2, $\frac{3}{4}$ und $-\frac{3}{4}$ als Lösungen angeboten. Mach die Probe und entscheide, welche der Zahlen wirklich Lösungen sind.

* Die Ägypter gaben mit Ausnahme von $\frac{2}{3}$ alle anderen Brüche nur als Summe von **Stammbrüchen**, das sind Brüche mit dem Zähler 1, an.

6. Im Algebrabuch des AL-CHARIZMI finden wir eine Aufgabe, die in heutiger Schreibweise als Bestimmungsgleichung so lautet: $x^2 + 15 = 8x$. Er gibt als Lösungen die Zahlen 3 und 5 an. Sind das Lösungen?

7. Für die Bestimmungsgleichung $x^3 + x^2 = 2x - 2x^3$ werden folgende Lösungen angeboten: $1, -1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0$.
Entscheide durch Proben, welche dieser Zahlen zu der Lösungsmenge gehören.

4.2.1.5 Was kann eine Information leisten?

Wir haben oben gesehen, daß $16\frac{5}{8}$ *eine* Lösung der Gleichung $x + \frac{1}{7}x = 19$ ist. Man wird sich also fragen müssen, ob es noch weitere Lösungen dieser Gleichung gibt oder ob $16\frac{5}{8}$ die einzige Lösung ist.
Falls es keine weitere Lösung gibt, dann wird durch die Information $x + \frac{1}{7}x = 19$ eindeutig eine Zahl x bestimmt. Gibt es aber mehr als eine Lösung, dann ist die Information mehrdeutig.
Allgemein unterscheidet man je nach der Anzahl der Lösungen verschiedene Arten von Informationen.

1) Eine Information ist **eindeutig**, wenn sie genau eine Zahl x bestimmt. Die Lösungsmenge der Aussageform enthält dann eine einzige Zahl.
Unser Informant hat die unbekannte Zahl x genau beschrieben.
Beispiel:
$3x = 2$ ist eine eindeutige Information über x. Denn wegen Satz 72.1 ist $\frac{2}{3}$ die Zahl, die durch sie eindeutig bestimmt ist.
Die Lösungsmenge der Aussageform $3x = 2$ ist die Menge $\{\frac{2}{3}\}$.

2) Manchmal reicht die Information nicht zur eindeutigen Bestimmung der unbekannten Zahl x aus. Der Informant hat die Zahl x also nicht genau genug beschrieben. Somit gibt es mehrere Möglichkeiten für x. Man sagt, die Information sei **mehrdeutig**. Die Lösungsmenge einer solchen Aussageform besteht dann aus mindestens zwei Zahlen.
Beispiel:
$x^2 = 64$.
Die Information reicht nicht aus, die unbekannte Zahl x eindeutig zu ermitteln. Wir können nämlich sagen, daß sowohl $+8$ als auch -8 Lösungen sind.

3) Je mehr Möglichkeiten es für die unbekannte Zahl x gibt, desto wertloser ist die Information zur Bestimmung der unbekannten Zahl x. Ganz schlimm wird es, wenn uns der Informant an der Nase herumführt und wir für die unbekannte Zahl x *jede* Zahl nehmen können. Die Information ist also allgemein gültig.
Wir merken uns

Definition 124.1: Eine Gleichung heißt **allgemeingültig**, wenn *jede* Zahl Lösung der Gleichung ist.

Beispiel:

$x + 1 = 1 + x.$

Jede Zahl ist Lösung dieser Gleichung. Also ist sie allgemeingültig. Die Lösungsmenge der Aussageform $x + 1 = 1 + x$ ist die Menge $\mathbb{Q}$.

4) Andererseits kann es aber vorkommen, daß es solch eine Zahl, wie sie durch die Information beschrieben wird, gar nicht gibt. Der Informant hat uns also angeschwindelt!
Wir merken uns

> **Definition 125.1:** Eine Gleichung heißt **widersprüchlich**, wenn *keine* Zahl Lösung der Gleichung ist.

Beispiel:

$x + 1 = x.$

Es gibt keine Zahl x, deren Wert sich nicht ändert, wenn man 1 dazuzählt. Also ist die Gleichung widersprüchlich.
Die Lösungsmenge der Aussageform $x + 1 = x$ ist die leere Menge $\{\,\}$, für die man auch $\emptyset$ schreibt.

Aufgaben

Bei den folgenden Aufgaben soll entschieden werden, welche Art von Gleichung vorliegt. Gib jedesmal die Lösungsmenge an.

1. **a)** $x + 3 = -18$ **b)** $x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x$ **c)** $-3\frac{1}{2}x = 3\frac{1}{2}$ **d)** $x^2 = 256$
e) $x^4 = 16$ **f)** $\frac{x}{x} = 3$ **g)** $\frac{x}{x} = 1$ **h)** $\frac{x}{x} = 0$

2. **a)** $-0{,}02x + 0{,}02 = 0{,}02$ **b)** $-0{,}02x + 0{,}02 = -0{,}02x$
c) $-2x^2 = -2{,}88$ **d)** $x + x = 2x$ **e)** $x^2 = -4$

•**3.** **a)** $\frac{x+1}{x} = 1$ **b)** $\frac{x+1}{x} = 0$ **c)** $9x^2 = 1024$
d) $x(x+3) = 0$ **e)** $3 \cdot (x+2) = 3x + 6$

4.2.2 Äquivalenzumformungen von Gleichungen

4.2.2.1 Äquivalenz von Gleichungen

Der einfachste Gleichungstyp ist von der Bauart $x = 7$. Eine Lösung dieser Gleichung liest man direkt ab, nämlich 7. Weitere Lösungen gibt es nicht, da man mit keiner von 7 verschiedenen Zahl an Stelle von x eine wahre Aussage erhält. Die Information über die gesuchte Zahl ist also eindeutig. Die gesuchte Zahl ist 7.

Wir halten fest: Gleichungen der Bauart $x = a$ sind eindeutige Informationen über die gesuchte Zahl x. Die gesuchte Zahl x heißt a, die Lösungsmenge der Gleichung $x = a$ ist die Menge $\{a\}$.
Normalerweise sind Gleichungen viel komplizierter, z. B. $13x - 7 = 5x + 4$. Um solche Gleichungen lösen zu können, formt man sie so lange um, bis man auf den einfachen Typ $x = a$ kommt. Bei diesem Umformen dürfen aber keine Lösungen hinzukommen und auch keine Lösungen verlorengehen. Umformungen, die dies leisten, bekommen einen besonderen Namen.

Definition 126.1: Zwei **Gleichungen** heißen **äquivalent**, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.
Eine Gleichungsumformung heißt **Äquivalenzumformung**, wenn die ursprüngliche Gleichung und die neue Gleichung äquivalent sind.

Unser Ziel ist es nun, Gleichungsumformungen aufzufinden, die als Äquivalenzumformungen zum Lösen von Gleichungen benützt werden können.

Aufgaben

Stelle bei den folgenden Gleichungen fest, ob sie äquivalent sind. Sind Gleichung I und Gleichung II äquivalent, dann kannst du kurz I $\Leftrightarrow$ II schreiben.

1. **a)** I. $x = 3$; II. $13x = 39$ **b)** I. $x + 1 = 2$; II. $x + 9 = 10$
   c) I. $x + 1 = 2$; II. $x + 10 = 9$ **d)** I. $x^2 = 1$; II. $x = 1$
2. **a)** I. $\frac{5}{3}x = \frac{3}{5}$; II. $x^2 = \frac{9}{25}$ **b)** I. $x = x$; II. $0 \cdot x = 0$
   c) I. $10\frac{3}{4} + x = 9\frac{7}{8} + x$; II. $\frac{x}{x} = 2$ **d)** I. $x - x = 0$; II. $1 = 1$

4.2.2.2 Äquivalenzumformung durch Termersetzung

Ersetzt man in einer Gleichung einen Term durch einen äquivalenten, so ändert sich die Lösungsmenge nicht, weil nach Definition 89.1 bei jeder Einsetzung der alte und der neue Term den gleichen Zahlenwert liefern.

Beispiele:

1) $2x + 5 - x = 1 - x - 8$
Vereinfacht man die Terme auf der linken und auf der rechten Seite der Gleichung, so erhält man die äquivalente Gleichung
$x + 5 = -7 - x$.

2) $3(x-5) = \dfrac{14+8x}{4}$

Unter Anwendung der Rechengesetze erhalten wir die äquivalente Gleichung

$3x - 15 = \frac{7}{2} + 2x.$

Durch Termersetzungen können wir die Gleichungen also vereinfachen. Zur vollständigen Lösung brauchen wir allerdings noch weitere Äquivalenzumformungen. Wir werden sie im folgenden kennenlernen. Weil es lästig ist, jedesmal durch einen Zwischentext zu versichern, daß man gerade eine Äquivalenzumformung durchgeführt hat, treffen wir die

> **Vereinbarung 127.1:** Die durch Äquivalenzumformungen entstandene neue Gleichung schreiben wir ohne Kommentar unter die alte Gleichung. Zur Verdeutlichung kann man auch zwischen die äquivalenten Gleichungen das Äquivalenzzeichen $\Leftrightarrow$ setzen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} -2(3-5(x-1)+4)-8 &= \tfrac{7}{3}(x-(9-2x)) \\ -2(7-5x+5)-8 &= \tfrac{7}{3}(x-9+2x) \\ -2(12-5x)-8 &= \tfrac{7}{3}(3x-9) \\ -24+10x-8 &= 7x-21 \\ 10x-32 &= 7x-21\,. \end{aligned}$$

Der Übersichtlichkeit halber haben wir die äquivalenten Gleichungen im letzten Beispiel so geschrieben, daß die Gleichheitszeichen immer untereinander zu stehen kamen. Dadurch erkennt man gut, wie sich die linke Seite und wie sich die rechte Seite jeweils verändert haben. Gleichungen in dieser Form untereinanderzuschreiben geht natürlich nur, wenn man schon weiß, wieviel Platz die linke Seite in der neuen Zeile brauchen wird. Du wirst es im Heft nicht immer so einrichten können. Eins mußt du aber immer tun: Jede neue Gleichung muß in eine neue Zeile geschrieben werden. Auch bei einfachen Termumformungen darfst du nie in derselben Zeile mit einem $=$-Zeichen weiterschreiben, auch wenn es noch so bequem wäre.
Beachte: Bei Gleichungen gibt es in jeder Zeile nur *ein* Gleichheitszeichen!

Beispiel:

Schreibe **nicht** $x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,
sondern **richtig** mit **zwei** Gleichungen

$$\begin{aligned} & x = 1 + \tfrac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & x = \tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

Aufgaben

1. Vereinfache die folgenden Gleichungen und gib die Lösungsmenge an.

a) $x + 0{,}5x = \frac{7}{2}x - 2x$
b) $\frac{3}{2} \cdot (5x - 2) = 1 - 4$
c) $\dfrac{-15x - 6}{3} + 1{,}5 = 3x - (3 : \frac{3}{8})x$
d) $x - 3(2\frac{1}{6} : 1\frac{6}{7}) = 0$
•**e)** $x(x - 2(x + 5)) = -10x - x^2$
••**f)** $3\frac{1}{2} \cdot [2 - x(1\frac{1}{2} + 2x) + x(0{,}5 + 2x)] = 7$

2. Die unbekannte Zahl muß nicht immer x heißen! Vereinfache die folgenden Gleichungen und gib die Lösungsmenge an.

a) $[(5 - 3 : 4) \cdot 6 - 22] \cdot y = 0$
b) $[(5 - 3 : 4) \cdot 8 - 34]z = 0$
c) $(0{,}25 - 0{,}35 \cdot \frac{5}{7}) \cdot u = 1{,}55 \cdot \frac{20}{31} - 2$
d) $y \cdot (9 : 4 \cdot 6 - 9 : 6 \cdot 4 - 4 : 6 \cdot 9 - 0{,}5) = 6 : 4 : 9$
e) $14\frac{1}{2}z - 8\frac{1}{3}z - 5\frac{1}{6}z = 5\frac{1}{6} - 8\frac{1}{3} - 14\frac{1}{2}$

3. Vereinfache und gib die Lösungsmenge an.

a) $[2{,}6 + (1\frac{1}{2} - 2\frac{4}{5}) \cdot 2]x = \frac{1}{2}[2 - \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) - 1{,}25]$
b) $[\frac{7}{3} \cdot 4\frac{1}{14} - (2{,}64 - 4{,}14)(-\frac{19}{3})]y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$

4.2.2.3 Äquivalenzumformung durch Addition von Termen

Bei der Gleichung $x - 3\frac{1}{2} = 7\frac{3}{4}$ sind beide Seiten schon so einfach wie möglich. Wir benötigen nun eine neue Äquivalenzumformung, die diese Gleichung auf die Form $x = a$ bringt. Dazu überlegen wir:
Wenn eine Gleichung eine Lösung besitzt, dann steht, wenn man sie sich eingesetzt denkt, links und rechts vom Gleichheitszeichen dieselbe Zahl. Addiert man nun auf beiden Seiten der Gleichung Gleiches, dann ergibt sich auf beiden Seiten die gleiche Summe. Um also zu erreichen, daß die unbekannte Zahl x alleine auf der linken Seite übrigbleibt – wir sagen kurz, wir wollen x **isolieren** –, müssen wir in unserem Beispiel auf beiden Seiten $3\frac{1}{2}$ addieren. Dieses Vorgehen deuten wir dadurch an, daß wir hinter die Gleichung zwei senkrechte Striche setzen und dahinter $+3\frac{1}{2}$ schreiben. Nun führen wir es vor:

$$\begin{aligned} x - 3\tfrac{1}{2} &= 7\tfrac{3}{4} \qquad \| + 3\tfrac{1}{2} \\ (x - 3\tfrac{1}{2}) + 3\tfrac{1}{2} &= 7\tfrac{3}{4} + 3\tfrac{1}{2} \\ x - 3\tfrac{1}{2} + 3\tfrac{1}{2} &= 11\tfrac{1}{4} \\ x &= 11\tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

Die gesuchte Zahl ist also $11\frac{1}{4}$.

Die obigen Überlegungen können wir verallgemeinern auf Terme, da Terme wie Zahlen behandelt werden. Es gilt

> **Satz 129.1:** Die Addition desselben Terms auf *beiden* Seiten einer Gleichung ist eine Äquivalenzumformung; kurz
> $$T_1 = T_2 \quad \| + T$$
> $$\Leftrightarrow T_1 + T = T_2 + T$$

Zur **Begründung** überlegen wir uns:

1) Ist a eine Lösung der Gleichung $T_1 = T_2$, dann gilt

$$T_1(a) = T_2(a), \quad \text{also auch}$$
$$T_1(a) + T(a) = T_2(a) + T(a).$$

Damit ist a auch eine Lösung der durch Termaddition umgeformten Gleichung $T_1 + T = T_2 + T$. Es gehen also bei der Umformung durch Termaddition sicherlich keine Lösungen verloren.

2) Ist umgekehrt b eine Lösung der umgeformten Gleichung $T_1 + T = T_2 + T$, dann gilt

$$T_1(b) + T(b) = T_2(b) + T(b).$$

Addiert man auf beiden Seiten $-T(b)$, dann erhält man

$$T_1(b) = T_2(b).$$

Das heißt aber, daß b auch eine Lösung der Gleichung $T_1 = T_2$ ist. Es kann bei der Umformung durch Termaddition also auch keine Lösung hinzugekommen sein.

Da somit bei der Termaddition weder Lösungen hinzugekommen sind noch verlorengegangen sind, stimmt die Lösungsmenge der Gleichung $T_1 = T_2$ mit der Lösungsmenge der Gleichung $T_1 + T = T_2 + T$ überein; die Umformung durch Addition von Termen ist also eine Äquivalenzumformung.

In der Sprache der Mengenlehre läßt sich die obige Überlegung kurz so schreiben, wenn L die Lösungsmenge von $T_1 = T_2$ und L' die von $T_1 + T = T_2 + T$ bedeuten und das Zeichen $\Rightarrow$ als Abkürzung für »daraus folgt« steht:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ a \in L \Rightarrow a \in L', \quad \text{d.h.} \quad L \subset L' \\ 2)\ b \in L' \Rightarrow b \in L, \quad \text{d.h.} \quad L' \subset L \end{array}\right\} \Rightarrow L = L'$$

Zum Einüben eine etwas anspruchsvollere Gleichung:

Beispiel 1:

$3x - 7 = 19 + 2x$. Wir wollen x auf der linken Seite isolieren. Dazu muß 7 auf beiden Seiten addiert und $2x$ auf beiden Seiten subtrahiert werden, d.h., auf beiden Seiten muß der Term $T = 7 - 2x$ addiert werden. Die Rechnung sieht also so aus:

$$\begin{aligned} 3x - 7 &= 19 + 2x \qquad \| \; +7 - 2x \\ (3x-7) + (7-2x) &= (19+2x) + (7-2x) \\ 3x - 7 + 7 - 2x &= 19 + 2x + 7 - 2x \\ x &= 26. \end{aligned}$$

Mit einiger Übung kannst du durch Kopfrechnen gleich von der 1. zur 4. Zeile kommen!

Es ist nicht günstig, die unbekannte Zahl auf der linken Seite zu isolieren, wenn dort die unbekannte Zahl weniger oft vorkommt als auf der rechten Seite. In einem solchen Fall isoliert man die unbekannte Zahl eben auf der rechten Seite!

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} -3{,}5x + 1{,}4 &= -2{,}5x + 0{,}1 \qquad \| + 3{,}5x - 0{,}1 \\ 1{,}3 &= x \end{aligned}$$

Aufgaben

1. **a)** $25 + x = 42$ **b)** $x + 56 = 38$ **c)** $2{,}65 + x = 2\frac{13}{20}$
d) $\frac{5}{7} = x + \frac{3}{4}$ **e)** $-28{,}1 = 16{,}5 + x$ **f)** $17\frac{5}{16} = \frac{52}{3} + x$
g) $\frac{2}{3} - 1{,}5 + 4 \cdot \frac{3}{7} = z - \frac{1}{14}$ **h)** $-8\frac{5}{36} + 2\frac{7}{24} = z - \frac{5}{27}$

2. **a)** $2x - 1 = x - 1$ **b)** $16{,}3x - \frac{1}{8} = 17{,}3x + 2\frac{1}{4}$
c) $\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} = 1{,}75 + 1{,}75x$ **d)** $\frac{5}{14}x = -\frac{9}{14}x$
e) $\frac{13}{8}x + 7 = 3 + 1{,}625x$ **f)** $-2{,}5x - 0{,}8145 = -1{,}804 - 3{,}5x$

3. **a)** $1 - [2 - (x - 5)] = 5 - (19 - 9)$ **b)** $126 + 7x = \left(\frac{x}{5} - 44\right) \cdot 30$
c) $7{,}5 - 2{,}4x = (3{,}1x - 9) \cdot 2 - 9{,}6x$ **d)** $\frac{x}{2} - \frac{x}{8} = 2 + \frac{x}{4} - \frac{7}{8}x$
e) $\frac{4}{7}x + \frac{2}{3}x - 13 = \frac{1}{6}x + \frac{1}{14}x$ **f)** $\frac{4}{5}x + 18 = \frac{x}{3} - 0{,}2x + 2\left(1 - \frac{x}{6}\right)$

4. **a)** $11x - 2(x - 1) = 5(2x - 3) - (1 + 2x)$
b) $x + 2[x + 3(x + 4)] = 15 + 8x$
c) $1 - 5(4x + 11) = 5[3x - 7(2x - 1)] + 6(6x - 14)$
d) $1{,}5(3 - 5x) - [4(2{,}8 + 0{,}3x) - 10] + 9x = 0{,}3x$
e) $[(x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}] \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{x}{2} - \frac{5}{4}x$

4.2.2.4 Äquivalenzumformung durch Multiplikation mit Termen

Bei der Gleichung $8x = 15$ sind beide Seiten schon so einfach wie möglich. Wir benötigen nun eine neue Äquivalenzumformung, die diese Gleichung auf die Form $x = a$ bringt. Dazu überlegen wir:
Wenn eine Gleichung eine Lösung besitzt, dann steht, wenn man diese sich eingesetzt denkt, rechts und links vom Gleichheitszeichen dieselbe Zahl. Multipliziert man nun beide Seiten der Gleichung mit dem gleichen Faktor, dann stellt sich auf beiden Seiten dasselbe Ergebnis ein. Um bei unserer Gleichung x zu isolieren, müssen wir also beide Seiten mit $\frac{1}{8}$ multiplizieren oder beide Seiten durch 8 dividieren.
Wir führen es vor:

$$8x = 15 \quad \| \cdot \tfrac{1}{8} \qquad \text{oder} \qquad 8x = 15 \quad \| :8$$

$$(8x) \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{15}{8} \qquad\qquad \frac{8x}{8} = \frac{15}{8}$$

$$8x \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{15}{8} \qquad\qquad x = \tfrac{15}{8}$$

$$x = \tfrac{15}{8}$$

Die gesuchte Zahl ist also $\frac{15}{8}$.
Die obigen Überlegungen können wir verallgemeinern auf Terme, da Terme wie Zahlen behandelt werden. Es gilt

> **Satz 131.1:** Die Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit einem Term ist eine Äquivalenzumformung, falls der Term nicht null ist.
>
> Kurz: $$T_1 = T_2 \quad \| \cdot T \qquad (T \neq 0)$$ $$\Leftrightarrow T_1 \cdot T = T_2 \cdot T$$

Zur **Begründung** überlegen wir uns:

1) Ist a eine Lösung der Gleichung $T_1 = T_2$, dann gilt
$T_1(a) = T_2(a)$, also auch
$T_1(a) \cdot T(a) = T_2(a) \cdot T(a)$.
Damit ist a auch eine Lösung der durch Termmultiplikation entstandenen Gleichung. Es gehen also bei der Umformung durch Termmultiplikation sicher keine Lösungen verloren.

2) Ist umgekehrt b eine Lösung der umgeformten Gleichung $T_1 \cdot T = T_2 \cdot T$, dann gilt
$T_1(b) \cdot T(b) = T_2(b) \cdot T(b)$.
Multipliziert man beide Seiten mit $\frac{1}{T(b)}$, was natürlich nur für $T(b) \neq 0$ möglich ist, dann erhält man
$T_1(b) = T_2(b)$.

Das heißt aber, daß b auch eine Lösung der Gleichung $T_1 = T_2$ ist. Es kann also bei der Umformung durch Termmultiplikation auch keine Lösung hinzugekommen sein, wenn $T(b) \neq 0$ gilt.
Da somit bei der Termmultiplikation weder Lösungen hinzugekommen sind noch verlorengegangen sind, stimmt die Lösungsmenge der Gleichung $T_1 = T_2$ mit der Lösungsmenge der Gleichung $T_1 \cdot T = T_2 \cdot T$ überein; die Umformung durch Multiplikation mit Termen $(\neq 0)$ ist also eine Äquivalenzumformung.

Zum Einüben zwei etwas anspruchsvollere Gleichungen.

Beispiel 1: $7\frac{1}{3}x = -5\frac{1}{2}$

Zum Rechnen verwandeln wir die gemischten Zahlen besser in gemeine Brüche:

$$\frac{22}{3}x = -\frac{11}{2}$$

Nun multiplizieren wir die Gleichung mit $\frac{3}{22}$, um x zu isolieren:

$$\frac{22}{3}x = -\frac{11}{2} \quad \| \cdot \frac{3}{22}$$

$$x = -\frac{11 \cdot 3}{2 \cdot 22}$$

$$x = -\frac{3}{4}.$$

Beispiel 2: $27{,}2 = -0{,}06x \quad \| : (-0{,}06)$

$$\frac{27{,}2}{-0{,}06} = x$$

Weil $a = b$ dasselbe bedeutet wie $b = a$, vertauschen wir der leichteren Lesbarkeit halber die beiden Seiten und vereinfachen weiter.

$$x = -\frac{2720}{6}$$

$$x = -\frac{1360}{3}.$$

Aufgaben

1. a) $2x = 5$ b) $\frac{1}{2}x = 3$ c) $\frac{2}{3}x = 9$
2. a) $5x = -2$ b) $2\frac{1}{2}x = -1$ c) $-3\frac{1}{2} = \frac{1}{4}x$
3. a) $-x = 7{,}1$ b) $(-2)x = 1$ c) $-0{,}1x = 0{,}01$
4. a) $-2{,}5x = 5\frac{5}{7}$ b) $3 - \frac{1}{5} = -\frac{5}{11}x$ c) $\frac{x}{27} = \frac{1}{18}$
5. a) $9 : 14 = \frac{x}{84}$ b) $-80 = x : 6$ c) $\frac{2x}{5} = 3 \cdot 2\frac{1}{6}$
6. a) $\frac{x}{7} = 4$ b) $-\frac{x}{2} = 7{,}8$ c) $-\frac{9}{8} = -\frac{8x}{9}$
7. a) $\frac{5}{6}x = -\frac{5}{4} + 1$ b) $x : 17{,}5 = 5{,}25 \cdot 0{,}01$ c) $\frac{x}{49{,}6} = 4{,}3 : 18{,}6$
8. a) $\frac{7}{9}(-x) = \frac{1}{-3}$ b) $(-x) : 1024 = \frac{17}{128}$ c) $\frac{-2{,}198}{-0{,}7} = -3{,}14(-x)$

4.2.2.5 Mehrfache Äquivalenzumformungen

In den meisten Fällen wird man nicht mit einer der drei im letzten Abschnitt behandelten Äquivalenzumformungen allein auskommen. Fast immer braucht man alle drei! Betrachten wir etwa die Gleichung

$$97 + 2x - (19x - 15) + 3 = 107 - 7x - (11x - (5 + 3x)).$$

Zuerst vereinfachen wir beide Seiten durch Termersetzungen:

$$\begin{aligned} 100 + 2x - 19x + 15 &= 107 - 7x - (11x - 5 - 3x) \\ 115 - 17x &= 107 - 7x - (8x - 5) \\ 115 - 17x &= 107 - 7x - 8x + 5 \\ 115 - 17x &= 112 - 15x. \end{aligned}$$

Durch Addition von Termen sorgen wir jetzt dafür, daß alle x-Glieder auf der einen und alle von x freien Glieder auf der anderen Seite stehen. Der Bequemlichkeit halber achten wir darauf, daß der Faktor bei x positiv ist.

$$\begin{aligned} 115 - 17x &= 112 - 15x \quad \| + 17x - 112 \\ 3 &= 2x. \end{aligned}$$

Durch Vertauschen der Seiten erhalten wir die gewohnte Form

$$2x = 3.$$

Zum Abschluß isolieren wir x durch Multiplikation mit $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} 2x &= 3 \quad \| \cdot \tfrac{1}{2} \\ x &= \tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

Die drei Äquivalenzumformungen reichen aus, um jede Gleichung, in der die Unbekannte nicht in zweiter oder gar in höherer Potenz vorkommt, zu lösen. Weil $x^1 = x$ gilt, sagt man auch: Die Unbekannte kommt in der Gleichung nur in der ersten Potenz vor. Für solche Gleichungen hat man einen eigenen Namen eingeführt.

Definition 133.1: Eine Gleichung, in der die Unbekannte nur in der ersten Potenz vorkommt, heißt **lineare Gleichung**.*

Den Weg zur Lösung einer linearen Gleichung fassen wir zusammen in

Regel 133.1: Eine lineare Gleichung löst man durch Äquivalenzumformungen in der folgenden Reihenfolge:
1. Vereinfachen
2. Addieren
3. Multiplizieren

* Zum ersten Mal 1694 belegt als *égalité linéaire* bei Jean PRESTET (1652–1690) in seinen *Nouveaux Élémens des Mathématiques ou Principes généraux de Toutes les Sciences, qui ont les grandeurs pour objet.*

Zur Einübung der Regel betrachten wir noch ein komplizierteres

Beispiel:
$$\begin{aligned}
3\tfrac{3}{4}x-(1\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}x)&=-3\tfrac{3}{4}+(1\tfrac{1}{2}x-(1\tfrac{1}{2}-x))+3\tfrac{3}{5}\\
3\tfrac{3}{4}x-1\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}x&=-\tfrac{3}{20}+(1\tfrac{1}{2}x-1\tfrac{1}{2}+x)\\
3\tfrac{1}{4}x-1\tfrac{1}{2}&=-\tfrac{3}{20}+(2\tfrac{1}{2}x-1\tfrac{1}{2})\\
3\tfrac{1}{4}x-1\tfrac{1}{2}&=-\tfrac{3}{20}+2\tfrac{1}{2}x-1\tfrac{1}{2}\\
3\tfrac{1}{4}x-1\tfrac{1}{2}&=-1\tfrac{13}{20}+2\tfrac{1}{2}x \quad \| -2\tfrac{1}{2}x+1\tfrac{1}{2}\\
\tfrac{3}{4}x&=-\tfrac{3}{20} \quad \| \cdot\tfrac{4}{3}\\
x&=-\tfrac{1}{5}
\end{aligned}$$

Manchmal vereinfacht sich die Rechnung, wenn man als allerersten Schritt die Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert, um die Brüche zu beseitigen.

Beispiel:
$$\frac{5x+12{,}5}{7}-\frac{5(0{,}4-2x)}{6}=\frac{9x-0{,}7}{4}-\frac{7x-1{,}1}{3}+2 \,\|\cdot 84$$
$$\begin{aligned}
12(5x+12{,}5)-14\cdot5\cdot(0{,}4-2x)&=21(9x-0{,}7)-28(7x-1{,}1)+2\cdot84\\
60x+150-28+140x&=189x-14{,}7-196x+30{,}8+168\\
200x+122&=-7x+184{,}1 \quad \| +7x-122\\
207x&=62{,}1 \quad \| :207\\
x&=0{,}3
\end{aligned}$$

Aufgaben

1. a) $8+6x=20$ b) $-3+5x=17$ c) $4x-12=44$

2. a) $1=13-6x$ b) $10=24-7x$ c) $-9x-144=-36$

3. a) $19-x=100-10x$ b) $3x+1=5x-3$ c) $19-2x=8x-16$

4. a) $4x+15-x=54$ b) $5x+2+x=26$ c) $-x+8-3x=0$

5. a) $17=17-12x+3x$ b) $31+x=111-7x$ c) $21+8x=30+5x$

6. a) $11x-41=10x-31$ b) $5x-5=15+3x$ c) $4x-16=19-3x$

7. a) $8x+22-x=100-11x-42$
b) $9x=7x+16+5x+7-10x$
c) $19+3x-23=10+2x-34$

8. a) $29x+39-34x=49-20x-10$
b) $4x+4-7x=-8x+2+5x-4$

9. a) $8x-17+x=9x-13-4$
b) $9x-16=10x-9-4x+5$

10. a) $0=14-8x+x-3x+x+4$
b) $9x+34-6x-33+2x=9$

11. a) $11x = 8x + 15 + 6x + 6 - 10x$
b) $27x - 9 - 17x + 10 = 45 + 5x - 4$

12. a) $7x - 6 + 5x - 4 + 3x - 2 + x - 4 = 0$
b) $18 = 93 - 6x - 11 - 4x - 5 - 2x + 1$

13. a) $12x - 10 + 8x - 6 + 4x - 8 = 0$
b) $6x - 13 + x - 1 + 12x - 15 - 10x + 2 = 0$

14. a) $19x = 5x + 2 + 5x + 3 + 7x + 3 + 6$
b) $36 + 12x - 19 - x + 10 - 8x = 0$

15. a) $21x - 21 - 7x + 7 = 7x + 21 + 14x - 7 - 19x + 26x$
b) $121x + 49 - 234x + 3 - x = x - 56 - 115x + 108$

16. a) $\frac{x}{4} - \frac{x}{3} + \frac{x}{8} - \frac{x}{6} + \frac{x}{2} + \frac{x}{12} = 11$ **b)** $\frac{7}{3}x + \frac{7}{6} - \frac{7}{2}x + \frac{1}{5} = 3 - \frac{14}{5}x$

17. a) $(-0{,}7)^3 + 5{,}94x - 9{,}02 + 2{,}63x + 11{,}31 = 6{,}24x - 6{,}263 - 1{,}11$
b) $0 = 12{,}9x - 1{,}45x - 3{,}29 - 0{,}99x - 11x + 0{,}32$

18. a) $2x - \frac{2}{3}x - \frac{3}{5}x = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{2}{5}x + 2 - \frac{2}{3}x$
b) $-0{,}5x + 9 = \frac{3}{2}x + 4 - \frac{6}{5}x + 0{,}2$

19. a) $5x - 9 = 3x + 7$ **b)** $2x + 11 = 8x - 10$

20. a) $126 + 7x = \frac{1}{5}x - 44$ **b)** $7{,}5 - 2{,}4x = 3{,}1x - 9$

21. a) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x = 2 + \frac{1}{4}x$ **b)** $\frac{1}{7}x + \frac{1}{3}x - 13 = \frac{1}{6}x$

22. a) $\frac{4}{5}x + 18 = \frac{1}{3}x + 0{,}2x + 2$ **b)** $1{,}5x - 8{,}5 = \frac{19}{24}x$

23. a) $\dfrac{0{,}64}{3}x + 0{,}5x - 0{,}43 = x$ **b)** $\dfrac{2{,}75}{9}x - \dfrac{x}{0{,}72} + x + 6 = 0$

24. a) $\dfrac{2x + 5}{3} = x + 4$ **b)** $\dfrac{8 + 12x}{19} = \dfrac{6x - 7}{4}$

25. a) $\dfrac{3x - 6}{5} - \dfrac{1 - 15x}{2} = 1$ **b)** $\dfrac{13x + 8}{6} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{6 - 11x}{15}$

26. a) $\dfrac{5x}{36} + \dfrac{1}{3} = 0$ **b)** $\dfrac{3x - 7}{5} = 4$

c) $5 = \dfrac{28 + 0{,}7x}{7} + 0{,}85$ **d)** $3 + \dfrac{8 - 11x}{6} = \dfrac{2}{3}$

27. a) $4(2x - 3) = 2(3x - 4)$ **b)** $(25 + 3x) \cdot 7 = (7 + 25x) \cdot 3$

28. a) $13 - 3(5 - x) = 7(x + 1) - 13$
b) $5(2x - 300) - (150 - x) \cdot 2 = 3x$

29. a) $3(1{,}8+3x)-26=9-5(1{,}5x-2)$
b) $0{,}75(7x-16)-0{,}25(9x-60)+1=0$
c) $5\left(\frac{x}{3}-26\right)-3\left(\frac{x}{4}+3\right)=\frac{x}{2}-14$
d) $\frac{1}{7}\left(1-\frac{2}{3}x\right)-\frac{3}{4}\left(\frac{x}{2}+1\right)=\frac{1}{2}(2-x)$

30. a) $3x+(9-x)=13$ **b)** $5x-(1+2x)=11$
c) $-(8-x)+2x=10$

31. a) $9x-2-(7-2x)=13$ **b)** $x-(2x-(3x-1))=101$
c) $12x=-12-(-12x-12)$ **d)** $5x-(3-4x)=3^2\cdot(x+4)$

32. a) $9-(5x+2)+(10+8x)-(3x-18)=x+20$
b) $93+2x-(19x-15)=100-7x-(11x-(5+2x))$

33. a) $(25+12x)-(10x-11)=(12+6x)-((12x+13)-(10x-11))$
b) $-2x-(4+(2x-3))=(30-18x)-(2x-(3x-5))$

34. a) $5(5+2x)=9+4x$ **b)** $0=4(10-2x)-3(x-5)$
c) $3(9-x)=5(x-9)$ **d)** $2^3(x-3^2)=3^2(x+2^3)$

35. a) $1(4x-3)+3(9-18x)=10(1-3x)$
b) $7(3x-7)+5(x-3)+4(17-x)=103-11x$

36. a) $13x-7(11-x)+11=4x-3(20-x)+7x$
b) $8(2x-3)-5(2x-8)=32-4(1-3x)+8x$

37. a) $3\frac{1}{3}x-4\frac{1}{4}=5\frac{1}{5}x-6\frac{1}{6}$ **b)** $0{,}1x-0{,}2=0{,}3x-0{,}4$

38. a) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x-\frac{3}{7}=-\frac{38}{7}$ **b)** $\frac{1}{3}x+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}x+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}x$

39. a) $10x=7\frac{1}{3}x-3\frac{1}{2}x+5\frac{1}{3}x-3\frac{1}{5}x+1+5x$
b) $x=\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}x-\frac{3}{5}x+\frac{5}{6}$

40. a) $\frac{4x}{3}-\frac{3x}{2}+\frac{4x}{5}+\frac{1}{6}=\frac{9}{5}-x$
b) $-37\frac{13}{30}=\frac{x}{3}-\frac{x}{2}+\frac{x}{6}-1\frac{5}{12}x+2\frac{4}{5}-3\frac{9}{10}x+98$

41. a) $47x-43=73+41{,}5x+7{,}2x+16{,}6$
b) $0=1{,}45x-2{,}7x-0{,}6x+0{,}5x-7{,}8-1{,}2$

42. a) $18x-7{,}52-2{,}35x=5{,}381-2{,}9x-0{,}58+13x$
b) $1{,}45x+3{,}29=12{,}9x-0{,}99x-11x+0{,}32$

43. a) $\frac{2}{3}(x-5)-x=1+\frac{2}{3}(11-2x)$
b) $\frac{1}{4}(3x-16)=2x-3(5+\frac{3}{4}x)+\frac{2}{3}(4-x)$

44. a) $3x(x+7) - x(3x+7) + 70 = 0$

b) $4x(6-3x) + 6x(2x+1) = 15$

45. $(\frac{3}{7}x - \frac{7}{3}) \cdot 21x - (33x+5) \cdot \frac{3}{11}x = 277$

46. $0{,}32x(1{,}25x - 10) + (6{,}3 - 0{,}8x) \cdot 0{,}5x + 1 = 0$

47. a) $x - (x - (x - (x-1) - 1) - 1) = 0$

b) $1 - 2(x - 3(x - 4(x-5))) = 11(11-2x) + 2x$

48. a) $6x - \dfrac{x-3}{2} = 5x + \dfrac{3+x}{2}$ **b)** $\dfrac{-x+3}{2} + 6x = \dfrac{x-3}{2} + 5x$

Die Aufgaben **49** *bis* **51** *sollen den Einfluß von Rundungen zeigen.*

49. a) $3{,}14x - 6{,}28 = -9{,}577$ **b)** $3{,}14x - 6{,}28 = -9{,}58$

c) $3{,}1x - 6{,}3 = -9{,}6$ **d)** $3x - 6 = -10$

50. a) $-1{,}27x + 9{,}51 = 9{,}88 - 1{,}22x$ **b)** $-1{,}3x + 9{,}5 = 9{,}9 - 1{,}2x$

c) $-x + 10 = 10 - x$

51. a) $3{,}14x - 7{,}28 = -8{,}193$ **b)** $3{,}1x - 7{,}3 = -8{,}2$ **c)** $3x - 7 = -8$

52. $25\left(\dfrac{2}{15}x + \dfrac{1}{3}\right) - x + 2\left(\dfrac{x}{6} - 15\right) - 36x = 0$

53. $x + 2[x + 3(x+4)] = 15$

54. $\left[\left(x \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\right) \cdot \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\right] \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{x}{2}$

55. $1 - 5(4x - 11) = 5[3x - 7(2x-1)]$

56. $1{,}5(3-5x) - [4(2{,}8 + 0{,}3x) - 10] + 9x = 0$

• **57.** $1 - (2 + 3 \cdot [(3x-8) - 2(8-3x)]) = 5(1-2x) - 2$

• **58.** $\left(\left[(x+1) \cdot 2 + \dfrac{1}{2}\right] \cdot 3 + \dfrac{1}{3}\right) \cdot 4 + \dfrac{1}{4} = \left(\left[(x+1) \cdot 2 + \dfrac{x}{2}\right] \cdot 3 + \dfrac{x}{3}\right) \cdot 4 + \dfrac{x}{4}$

59. $5 \cdot \dfrac{x-2}{9} - (2x - 18) \cdot 3 = \dfrac{7}{3} \cdot \dfrac{9x+10}{5}$

• **60.** $\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{3x+5}{6} - \dfrac{2(2x-3) - 24}{5} = 1\dfrac{1}{4} - \dfrac{(x-270) \cdot \frac{1}{5}}{9}$

• **61.** $\dfrac{\frac{4}{5}(x+4)}{6} - 3\left(\dfrac{3x-1}{4} - x\right) = 2x - 11$

•• **62.** $\dfrac{7\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{2}\right)}{16} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4x + 2{,}5}{8} - 3\left(1 - \dfrac{x}{64}\right) + \dfrac{17}{32} \cdot (x-2) = \dfrac{1}{192}$

**4.2.2.6. Die Äquivalenzumformungen des AL-CHARIZMI oder was bedeutet Algebra?

Du kennst nun die 3 Äquivalenzumformungen, mit deren Hilfe du lineare Gleichungen lösen kannst. Wir faßten sie kurz zusammen in der Regel »Vereinfachen – Addieren – Multiplizieren«. Diese Äquivalenzumformungen waren von Anbeginn an das Rüstzeug der Mathematiker, die Gleichungen lösen wollten. Ausführlich hat sie AL-CHARIZMI in seinem *al-Kitab al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa-'l-muqabala* beschrieben.

Zuerst rät AL-CHARIZMI dem Leser, so wie wir es dir geraten haben, in einer Gleichung die Nenner zu beseitigen, indem man jedes Glied mit dem Hauptnenner multipliziert. Die Gleichung ist dann einfacher geworden. Dann ersetzt er auf jeder Seite kompliziertere Terme durch einfachere, so wie wir es auch machen. So entsteht z. B.

$$8x + 11 = 13 - 7x.$$

AL-CHARIZMI empfindet das Wegnehmen von $7x$ von der Zahl 13 als etwas, was die 13 verletzt. Er möchte es wiedergutmachen. So wie ein Arzt ein ausgerenktes Glied durch Einrichten wieder voll funktionsfähig macht, so will er die 13 wieder unverletzt sehen. Dazu braucht er bloß auf beiden Seiten $7x$ zu addieren. Diese Äquivalenzumformung des Wiederherstellens nennt AL-CHARIZMI *al-dschabr*. Nun weißt du, was das Wort *al-dschabr*, aus dem *Algebra* entstanden ist, mathematisch bedeutet.
Durch al-dschabr wird aus der obigen Gleichung also die äquivalente Gleichung

$$15x + 11 = 13.$$

Jetzt betrachtet AL-CHARIZMI beide Seiten, d. h., er stellt sie einander gegenüber. Dabei sieht er, daß auf der linken Seite 11 zu $15x$ addiert wird. Er stellt sich vor, daß 11 auch rechts als Summand auftritt, also $13 = 2 + 11$. Durch Subtraktion von 11 auf beiden Seiten kann er diesen Überschuß ausgleichen. Diese Äquivalenzumformung des Vergleichens und Ausgleichens nennt AL-CHARIZMI *al-muqabala*. Nun weißt du auch, was das zweite Wort im Titel seines Algebrabuchs für einen mathematischen Sinn hat.
Durch al-muqabala wird also aus der letzten Gleichung die äquivalente Gleichung

$$15x = 2.$$

Nun muß noch x isoliert werden, d. h., $15x$ muß auf $1x$ zurückgeführt werden. Dies geschieht, indem man die Gleichung durch 15 dividiert; man erhält $x = \frac{2}{15}$. Diese Äquivalenzumformung des Zurückführens auf $1x$ nennt AL-CHARIZMI *al-radd*.
Wäre man aber auf eine Gleichung der Form $\frac{1}{4}x = 6$ gestoßen, dann hätte man $\frac{1}{4}x$ zu $1x$ vervollständigen müssen. Dies geschieht, indem man die Gleichung mit 4 multipliziert; man erhält $x = 24$. Diese Äquivalenzumformung des Vervollständigens auf $1x$ nennt AL-CHARIZMI *al-ikmal*.
Da für uns die Division durch eine Zahl dasselbe ist wie die Multiplikation mit dem Kehrwert dieser Zahl – statt durch 15 zu dividieren, multiplizieren wir mit $\frac{1}{15}$ –, müssen wir die beiden letzten Äquivalenzumformungen nicht unterscheiden und haben sie zusammengefaßt in der Äquivalenzumformung durch Termmultiplikation.
Natürlich war AL-CHARIZMI nicht der erste, der Gleichungen so löste. Der griechische Mathematiker DIOPHANT aus Alexandria (um 250 n. Chr.) beschreibt genau die beiden Äquivalenzumformungen des Wiederherstellens und des Ausgleichens in seinem Werk Ἀριθμητικῶν βιβλία (Arithmetikōn biblía) = *Bücher über die Zahlenlehre*. Aber AL-CHARIZMI hat dieses Werk nicht gekannt. Es wurde erst nach seinem Tode ins Arabische übersetzt.

4.2.3 Produkte mit dem Wert null

Wir erinnern an die Tatsache, daß die Null als Faktor jedes Produkt zu null macht*, und halten dies fest in

> **Satz 139.1:** Wenn in einem Produkt mindestens ein Faktor null ist, dann hat das Produkt den Wert null.

Beispiele:

1) $3 \cdot 0 = 0$ **2)** $0 \cdot (-7) = 0$

3) $\frac{1}{2} \cdot 2^{10} \cdot 0 \cdot 8 = 0$ **4)** $-3 \cdot 0 \cdot (a^2 - a) \cdot 0 \cdot 5 = 0$

Wissen wir umgekehrt von einem Produkt, daß es den Wert null hat, dann muß mindestens einer der Faktoren null sein; denn wären alle Faktoren von null verschieden, dann wäre nach den Vorzeichenregeln auch das Produkt von null verschieden.
Es gilt also

> **Satz 139.2:** Wenn ein Produkt den Wert null hat, dann ist mindestens einer der Faktoren null.

Als Anwendung dieses Satzes bestimmen wir die Lösungsmenge der Gleichung

$(x-1)(x-2) = 0$.

Das links stehende Produkt besteht aus den Faktoren $x-1$ und $x-2$; mindestens einer davon muß null sein. Es gilt also $x-1=0$ oder $x-2=0$, d.h., $x=1$ oder $x=2$.

Beide Faktoren können nicht zugleich null werden, weil x nicht zwei verschiedene Werte gleichzeitig annehmen kann.
Die Information, die uns die Gleichung $(x-1)(x-2)=0$ liefert, ist also mehrdeutig. Sie ist äquivalent mit der Information »$x = 1$ oder $x = 2$«. Solche mit *oder* zusammengesetzte Aussageformen kommen in der Mathematik häufig vor, so daß es sich lohnt, für das Wort »oder« in diesem Zusammenhang eine symbolische Abkürzung einzuführen. Für *oder* schreibt man kurz $\vee$. Das $\vee$ soll an das lateinische Wort für *oder*, nämlich *vel*, erinnern.
Eine Zahl ist Lösung einer *Oder*-Aussageform, wenn beim Einsetzen eine wahre Oder-Aussage entsteht. Eine **Oder-Aussage** in der Mathematik ist eine Verknüpfung zweier Teilaussagen durch das Wort oder bzw. durch $\vee$.

Eine Oder-Aussage ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der Teilaussa-

* Beachte die Groß- und Kleinschreibung: Die Zahl Null hat den Wert null. Bei der Zahl 10 sagt die Ziffer Null, daß die Zehn null Einer hat.

gen wahr ist, d. h., wenn die erste Teilaussage wahr ist oder wenn die zweite wahr ist oder wenn beide zugleich wahr sind. Die Lösungsmenge einer Oder-Aussageform ist also die Vereinigungsmenge der Lösungsmengen der Teilaussageformen. Das Zeichen $\cup$ erinnert an $\vee$. Unsere Oder-Aussageform $x = 1 \vee x = 2$ besitzt demnach die Lösungsmenge $L = \{1; 2\}$.

** Zur Geschichte der Null

In einem Zeichenwertsystem, wie es die Ägypter, die Griechen und die Römer verwendeten, brauchte man keine Null; denn 10 schrieb man römisch eben als X und 101 als CI. Interessanterweise findet man aber um 100 v. Chr. bei den Ägyptern ein Zeichen für den Wert null, die abwehrenden Hände (Abbildung 140.1). Bei einem Stellenwertsystem ist aber ein Zeichen für die nicht besetzte Stelle nötig; denn 11 ist etwas anderes als 101. Beim babylonischen Stellenwertsystem, dem 60er- oder Sexagesimalsystem, taucht bereits um 2000 v. Chr. ein solches Lückenzeichen auf, wird aber erst ab 200 v. Chr. systematisch verwendet. (Abbildung 140.2)
Die Inder besaßen spätestens seit den ersten Jahrhunderten n. Chr. ein Stellenwertsystem, das praktischste, das jemals erfunden worden war und das wir heute noch benützen. Zu ihren neun Zahlzeichen für eins, zwei, …, neun kommt im 7. Jh. ein Zeichen für die Lücke, die sie *sunya = die Leere* genannt hatten, hinzu; es ist ein Punkt oder auch ein kleiner Kreis.
Woher hatten nun die Inder dieses Zeichen? Darüber streiten bis heute die Gelehrten. Die einen meinen, die Inder hätten es selbst erfunden. Nun stammt die früheste erhaltene indische Null als Kreisring von einer Tempelinschrift bei Gwalior aus dem Jahre 870. Daher meinen andere Gelehrte, die Inder könnten den Punkt und den Kreis für die Null von den Chinesen übernommen haben; denn in einem chinesischen astronomischen Text aus der Zeit von zwischen 718 und 729 ist uns ein Punkt für die Null überliefert. Noch früher, und vielleicht von China beeinflußt, sind Inschriften aus Kambodscha und von der indonesischen Insel Bangka mit den Jahreszahlen 605 bzw. 608 (Abbildung 140.3). Haben die Inder über ihre Kaufleute von dort die Idee bezogen? Oder stammt sie gar von den Griechen?
Der größte Astronom des Altertums, Klaudios Ptolemaios (um 100–160) benötigte ein Zeichen, um anzudeuten, daß ein Winkel null Grad, null Minuten und nur 14 Winkelsekunden mißt. Er

Abb. 140.1 Ägyptisches Zeichen für null an einem Tempel in Edfu (2./1. Jh. v. Chr.)

Abb. 140.2
Der Doppelhaken, das babylonische Lückenzeichen:
$2 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 15 = 7215$

Abb. 140.3
Die Schakajahrzeichen 605 (= 683/4 n. Chr.) und 608 (= 686/7 n. Chr.) Der südindische Schakakalender beginnt seine Zeitzählung am 15. März 78 n. Chr.

Abb. 140.4
Die Mayazahl 820 =
$= 8 \cdot (20 \cdot 18) + 2 \cdot 20 + 0 =$
$= 2920$ indisch

schrieb dann $\bar{o}\bar{o}\ \overline{\alpha\delta}$. Dabei soll das *o* eine Abkürzung von *οὐδέν* (udén) = *nichts* sein. So legt es uns die aus dem 9. Jh. stammende älteste erhaltene Handschrift seiner Μαθηματικὴ σύνταξις (Mathematiké sýntaxis) = *Mathematische Zusammenstellung* des astronomischen Wissens seiner Zeit nahe. Die indischen Astronomen der darauf folgenden Jahrhunderte lernten aber von den Griechen. Und da sich gerade in der Zeit zwischen 200 und 600 n. Chr. das indische Stellenwertsystem entwickelte, was liegt da näher, als anzunehmen, daß sie das *o* des PTOLEMAIOS als Ziffer für ihre Lücke nahmen und sie auch *Leere* nannten?
Im Jahre 773 brachte ein Inder ein in Sanskrit geschriebenes astronomisches Werk nach Bagdad an den Hof des Kalifen AL-MANSUR (regierte 754–775). Es wurde ins Arabische übersetzt. So wurden die Araber mit den indischen Ziffern bekannt, die wir heute die arabischen nennen. AL-CHARIZMI überarbeitete später diese Übersetzung in seinen *Astronomischen Tafeln*. Zur Verbreitung der indischen Ziffern und der Kunst des Rechnens mit ihnen trug AL-CHARIZMI wesentlich durch ein Buch bei, das nur mehr bruchstückhaft in einer lateinischen Übersetzung unter dem Titel *Algoritmi de numero indorum* – »Buch des AL-CHARIZMI über die Zahlenschreibweise der Inder« – erhalten ist. *Sunya* übersetzten die Araber mit *al-sifr*, ihrem Wort für *Leere*. *Al-sifr* wurde latinisiert zu *cifra*, womit sogar noch 1799 Carl Friedrich GAUSS (1777–1855) die Null bezeichnete. Im Deutschen entstand aus *cifra* das Wort *Ziffer*, das im 15. Jh. allmählich die heutige Bedeutung von Zahlzeichen erlangte. Im Lateinischen hieß Zahlzeichen aber *figura*, der kleine Kreis für die durch kein Zahlzeichen besetzte Stelle *figura nihili* = *Zeichen für das Nichts* oder auch *nulla figura* = *kein Zahlzeichen*. Daraus entstand im Deutschen zunächst *Nulla*, dann *eine Nulle*, so z. B. 1716 belegt im *Mathematischen Lexicon* des Christian v. WOLFF (1679–1754), der in der 2. Auflage 1734 bereits die Kurzform *Null* als Stichwort aufführt.* Unabhängig von der Alten Welt haben in der Neuen Welt die Maya vielleicht schon um 500 n. Chr., also noch vor allen anderen Völkern, ein vollwertiges Stellenwertsystem mit der Null als Ziffer gekannt (Abbildung 140.4).

Aufgaben

1. **a)** $145x = 0$ **b)** $x \cdot (17^2 - 6^3) = 0$
c) $\frac{7}{9} \cdot y \cdot \frac{3}{14} = 0$ **d)** $(29 - 377 : 13) \cdot 3z = 0$
e) $16 + \frac{2}{5}x = 2\frac{1}{2} \cdot 6\frac{2}{5}$ **f)** $1{,}97x \cdot 4 = 23{,}5 + 15\frac{2}{3} : (-\frac{2}{3})$

2. Bestimme die Lösungsmenge.
a) $(x+1)(x-2) = 0$ **b)** $(x - \frac{2}{3})(x + \frac{1}{4}) = 0$
c) $(6x-3)(2x-1) = 0$ **d)** $(\frac{2}{5}x - 15)(1\frac{2}{3} - 2x) = 0$
e) $14(3x-8)(65+13x) = 0$ **f)** $(2\frac{5}{6}x - 34) \cdot 7^2 \cdot (1{,}5 - 2{,}5x) = 0$

3. **a)** $(x+1)^2 = 0$ **b)** $3 \cdot (2x-5)^2 = 0$
c) $2{,}35 \cdot (x-2)^3 = 0$ **d)** $(x+9)(x-9)^2 = 0$

•**4.** **a)** $(2x+1)(3x+2)(4x+3) = 0$ **b)** $(5x-9)(11+2x)(7x-49) = 0$
c) $89^2(16-5x)(x-1)^2 = 0$
d) $[(1{,}75x - 5{,}25)(x+19)] \cdot 5(2-x) = 0$

* Aus dem lateinischen *cifra* wurde im 15. Jh. das französische *chiffre* und schließlich das englische *cipher*, die beide neben *Null* und *Ziffer* auch noch *Geheimzahl* bedeuten. In dieser Bedeutung entstand im 17. Jh. das deutsche Fremdwort *Chiffre*. Bei LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240) wird aus *al-sifr* 1202 *zephirum*, woraus das französische *zéro*, das italienische *zero* und ddas englische *zero* wurden.

•**5.** Gib eine möglichst einfache Gleichung an, die die folgenden Zahlen als Lösung besitzt

a) 2 und 3 **b)** 2 und -3 **c)** -2 und 3
d) -2 und -3 **e)** $\frac{3}{2}$ und $-\frac{1}{4}$ **f)** 0 und -1
g) 0 und 1 und -1 **h)** 2 und -2 (zwei Möglichkeiten!)

6. Entscheide, welche der folgenden Oder-Aussagen wahr sind.

a) Hannibal war ein Römer oder Alexander der Große war ein Römer.
b) Eine Spinne hat 6 oder 8 Beine.
c) Die Hauptstadt der Türkei ist Istanbul oder Izmir.
d) $2 = 3 \vee 2 < 3$
e) $2 = 3 \vee 2 > 3$
f) $2 < 3 \vee 2 > 3$
g) $2 < 3 \vee 2 = 3 \vee 2 > 3$
h) 2 teilt 11 oder 2 teilt 12.
i) 2 teilt 17^{17} oder 2 teilt $17^{17} + 1$.