Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

4.2.1 Gleichung als Information über eine unbekannte Zahl

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

4.2 Lösen von Gleichungen

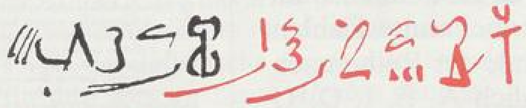
4.2.1 Gleichung als Information über eine unbekannte Zahl

4.2.1.1 Ein historisches Beispiel

Der Hyksoskönig* A'User-re Apophis (um 1590–um 1550 v. Chr.) herrschte schon seit 33 Jahren über Ägypten. Im 4. Monat der Überschwemmungsjahreszeit dieses 33. Regierungsjahres schrieb Ahmose** auf eine Papyrusrolle*** ein altes Buch der Mathematik ab, das aus der Zeit des Königs Amenemhet III. (1842–1794 v. Chr.) stammte.**** Die Rolle wurde im 19. Jh. wieder aufgefunden und im Jahre 1858 in Luxor an den schottischen Juristen Alexander Henry Rhind (1833–1863) verkauft. Sie ist 33 cm breit und 5,34 m lang und beidseitig beschrieben (Abb. 113). Der Text der Rolle – sie heißt heute *Papyrus Rhind* – beginnt mit einer großen Versprechung:
»Regeln zur Erforschung aller Dinge, zur Erkenntnis alles Seienden, aller dunklen Geheimnisse«.

Abb. 119.1 Papyrusrolle (um 1250 v. Chr.) Kairo, Ägyptisches Museum

Dann kommen Divisionstabellen, an die sich 84 Aufgaben anschließen. Diese entschleiern zunächst das Geheimnis der Zahlen und der Bruchrechnung, dann lösen sie Probleme aus der Geometrie und der Lehre von den Körpern, und schließlich beschäftigen sie sich mit Fragen aus der Landwirtschaft. Aufgabe 24 – man liest den Text von rechts nach links – lautet:



Übersetzung: Haufen, sein Siebentel zu ihm, es macht 19.
Gemeint war: Ein Siebentel einer unbekannten Zahl wird zu dieser Zahl hinzugefügt; man erhält dann 19.

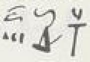
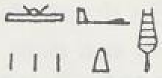
* Hyksos bedeutet »Fürst aus der Fremde«. Mit diesem Wort bezeichneten die ägyptischen Geschichtsschreiber später die aus Westasien stammenden fremden Herrscher, die Ägypten von ca. 1650–ca. 1540 v. Chr. regiert hatten.

** sprich Achmose, zu deutsch *Mondgeborener*. Oft liest man auch die gräzisierte Form Ahmes.

*** Zu Beginn des 3. Jahrtausends v. Chr. gelang es den Ägyptern, aus dem faserigen Mark des dreieckigen Halms der bis zu 6 m hohen Doldenpflanze Cyperus papyrus, die in den Sumpfgebieten wuchs, einen Beschreibstoff herzustellen, der das Leder verdrängte. Wegen des hohen Verbrauchs wurde die Papyrusstaude immer seltener, so daß sich König Eumenes I. (263–241 v. Chr.) von Pergamon genötigt sah, feingegerbtes Leder wieder als Schreibmaterial zu verwenden, das sog. Pergament. Die Papyrusstaude ist heute in Ägypten ausgerottet.

**** Der Pharao Amenemhet III. war so klug, von den Bürgern nur die Steuern zu verlangen, die sie auch aufbringen konnten. Dazu ließ er jedes Jahr den höchsten Pegelstand des Nils messen und daraus die zu erwartende Ernte berechnen. Dann erst setzte er die Jahressteuern fest.

4.2.1.2 Die Unbekannte

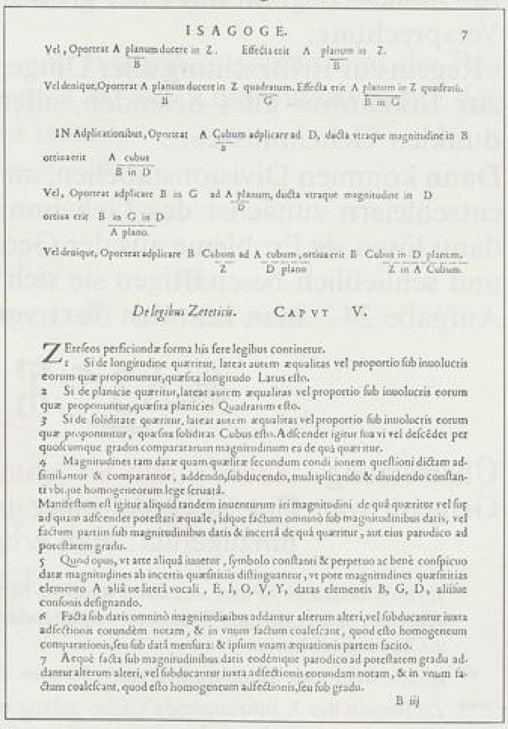
Die Ägypter waren vermutlich die ersten, die für eine unbekannte Zahl eine eigene Bezeichnung verwendeten. Im *Papyrus Rhind* schrieben sie dafür  – in Hieroglyphen* . Ausgesprochen wurde dieses Wort »aha«; seine Bedeutung war eigentlich *Haufen*.

Es war sicherlich ein ganz großer Einfall in der Entwicklung der Mathematik, für eine Zahl, die man noch gar nicht kennt, ein eigenes Wort zu verwenden. Denn nun konnte man, da sie ja einen Namen hatte, von ihr reden, mit ihr Überlegungen, ja sogar Rechnungen ausführen.

Diese großartige Idee taucht auch bei den Babyloniern und bei den Indern auf, im 4. Jh. v. Chr. finden wir sie bei griechischen Mathematikern. THYMARIDAS nennt die gesuchte Zahl genauso, wie wir es heute machen, nämlich *unbekannt* ἀόριστον (aóriston). Bei AL-CHARIZMI (um 780–nach 847) heißt die unbekannte Zahl شيء = *schai* = *ein Etwas*.

Nun haben wir oben auf Seite 15 gesehen, daß es sich immer mehr eingebürgert hatte, bekannte Zahlen durch Buchstaben wiederzugeben, wenn man allgemeine Rechenregeln angeben oder einen allgemeingültigen Rechenweg beschreiben wollte. Was lag also näher, als auch für die unbekannte Zahl einen Buchstaben zu verwenden? Aber welchen? Recht einleuchtend ist eigentlich die Idee von François VIÈTE (1540–1603), der 1591 vorschlug, für die unbekannte Zahl den Vokal A zu verwenden, und, falls es mehrere unbekannte Zahlen gibt, eben die Vokale der Reihe nach zu benützen, nämlich A, E, I, O, U und Y. Bekannte Zahlen sollten durch Konsonanten bezeichnet werden, also durch B, G, D usw. (Siehe Abbildung 120.1, Nr. 5.)

Durchgesetzt hat sich aber eine Schreibweise, die 1637 der große französische Philosoph und Mathematiker René DESCARTES (1596 bis 1650) ohne weitere Begründung im Abschnitt *La Géométrie* seines *Discours de la méthode* einführte.


ISAGOGE. 7

Vel, Oporteat A planum/B ducere in Z. Effecta erit A planum in Z/B.

Vel denique, Oporteat A planum/B ducere in Z quadratum/G. Effecta erit A planum in Z quadrati./B in G

IN Adplicationibus, Oporteat A Cubum/B adplicare ad D, ducta vtraque magnitudine in B ortiua erit A cubus/B in D

Vel, Oporteat adplicare B in G ad A planum/G, ducta vtraque magnitudine in D ortiua erit B in G in D/A plano.

Vel denique, Oporteat adplicare B Cubum/Z ad A cubum/D plano, ortiua erit B Cubus in D planum./Z in A Cubum.

De legibus Zeteticis. CAPVT V.

ZEteseos perficiendæ forma his fere legibus continetur.

1 Si de longitudine quæritur, lateat autem æqualitas vel proportio sub inuolucris eorum quæ proponuntur, quæsita longitudo Latus esto.

2 Si de planicie quæritur, lateat autem æqualitas vel proportio sub inuolucris eorum quæ proponuntur, quæsita planicies Quadratum esto.

3 Si de soliditate quæritur, lateat autem æqualitas vel proportio sub inuolucris eorum quæ proponuntur, quæsita soliditas Cubus esto. Adscendet igitur sua vi vel descēdet per quoscumque gradus comparatarum magnitudinum ea de quâ quæritur.

4 Magnitudines tam datæ quam quæsitæ secundum conditionem quæstioni dictam adsimilantor & comparantor, addendo, subducendo, multiplicando & diuidendo constanti vbique homogeneorum lege seruatâ.

Manifestum est igitur aliquid tandem inuenturum iri magnitudini de quâ quæritur vel sui ad quam adscendet potestati æquale, idque factum omninò sub magnitudinibus datis, vel factum partim sub magnitudinibus datis & incertâ de quâ quæritur, aut eius parodico ad potestatem gradu.

5 Quod opus, vt arte aliquâ iuuetur, symbolo constanti & perpetuo ac benè conspicuo datæ magnitudines ab incertis quæsititiis distinguantur, vt pote magnitudines quæsititias elemento A aliâue literâ vocali, E, I, O, V, Y, datas elementis B, G, D, aliisue consonis designando.

6 Facta sub datis omninò magnitudinibus addantur alterum alteri, vel subducantur iuxta adfectionis eorundem notam, & in vnum factum coalescant, quod esto homogeneum comparationis, seu sub datâ mensura: & ipsum vnam æquationis partem facito.

7 Aequè facta sub magnitudinibus datis eodémque parodico ad potestatem gradu addantur alterum alteri, vel subducantur iuxta adfectionis eorundem notam, & in vnum factum coalescant, quod esto homogeneum adfectionis, seu sub gradu.

B iij

Abb. 120.1 Seite 7r der *In artem analyticem Isagoge* (1591) des François VIÈTE (1540–1603)

* Entstanden aus den griechischen Wörtern ἱερός (hierós) = *heilig* und γλύφειν (glýphein) = *einmeißeln*. Sprich hi-erós, Hi-eroglyphe.

Er bezeichnete die unbekannten Zahlen mit x, y und z, die bekannten dagegen mit den ersten Buchstaben des Alphabets, also mit a, b, c usw. *Wir* wollen es genauso halten!

Falls du mehr über die geschichtliche Entwicklung wissen willst, dann lies weiter!

Abb. 121.1 René DESCARTES, latinisiert zu CARTESIUS (31.3.1596 La Haye-Descartes/Touraine – 11.2.1650 Stockholm)

Die BABYLONIER (um 1800 v. Chr.) nannten die unbekannte Zahl 𒍑 = *usch* = *Länge*, die INDER (vor 300 v. Chr.) यावत् तावत् = *yavat-tavat* = *wieviel-soviel.* Erst um 250 n. Chr. kamen griechische Mathematiker, unter ihnen DIOPHANT, (siehe Aufgabe 166/**15**), auf die Idee, für die unbekannte Zahl, die sie kurz *Zahl* = ἀριθμός (arithmós) nannten, eine Abkürzung einzuführen, nämlich ς′, über deren Entstehung heute noch die Gelehrten streiten. Die einen meinen, sie sei der letzte Buchstabe von ἀριθμός, zusammen mit einem Akzent. Andere hingegen meinen, das Zeichen sei eine Verschmelzung der beiden ersten Buchstaben dieses Worts. Wie dem auch sei, die Abkürzung war erfunden! Fast 400 Jahre später – wir wissen es sogar ganz genau, es war im Jahre 628 – kam auch in Indien jemand auf die Idee, das lange *yavat-tavat* abzukürzen: In seinem in Versen abgefaßten Mathematiklehrbuch schrieb BRAHMAGUPTA (um 598 bis nach 665) einfach या = *ya* dafür.

Die ARABER lernten von den Indern die Mathematik, und die EUROPÄER des Mittelalters lernten sie bei den Arabern. Da das *schai* des AL-CHARIZMI im Arabischen auch *Sache* bzw. *Ding* heißt, übersetzte man es mit dem lateinischen *res*, gelegentlich auch mit *causa*, woraus im 15. Jh. das italienische *cosa* wurde. Daraus wurde im Deutschen *Coß* als Bezeichnung für das, was wir heute *Algebra* nennen.

Bis zum x für die Unbekannte war aber noch ein langer Weg. Einige Araber kürzten das *schai* mit s ab, LUCA PACIOLI (um 1445–1517) mit *co.* seine *cosa.* Das tat man auch in Deutschland, so z. B. in den vor 1486 geschriebenen Abhandlungen, die im *Codex Dresden C80* zusammengebunden sind: Der Verfasser der *Deutschen Algebra* von 1481 schreibt 9 für *cosa*, der der *Lateinischen Algebra* zunächst ꝭ, das ist ein c und ein o, das in ein Schwänzchen ausläuft. Immer mehr aber krümmt er sein c nach links und gibt ihm schließlich sogar eine Spitze: ꝭ ꝭ ꝭ. Den Plural *cosae* kennzeichnet er durch ein kleines hochgestelltes e: ꝭ^e. In der Form ꝭ führt es Christoff RUDOLFF (um 1500–vor 1543) in seiner 1525 gedruckten *Coß* als Symbol für die Unbekannte ein. Er liest es aber – wie andere auch – als *radix*, vermutlich, weil es einem handschriftlichen r ähnelt, vor allem aber, weil GERHARD VON CREMONA (1114–1187) mit *radix* das arabische *dschidr* (= Wurzel) übersetzt hat, das AL-CHARIZMI auch für die unbekannte Größe verwendete.* Gelegentlich wurde es übrigens auch *res* gele-

* Siehe Lösungsheft Seite 4 f.

sen.* Vor allem durch die *Arithmetica integra* (1544) Michael STIFELS (1487?–1567) fand 𝔠 seine Verbreitung. DESCARTES hat es noch benutzt, doch 1637 entschied er sich anders: das x als Zeichen für die Unbekannte war geboren.

Mit der Schreibweise von DESCARTES lautet die Aufgabe 24 des *Papyrus Rhind*

$$x + \tfrac{1}{7}x = 19\,.$$

Diese Gleichung stellt eine Information über eine unbekannte Zahl x dar. Unsere Aufgabe besteht nun darin, auf Grund dieser Information die Zahl x zu entlarven. Da man annimmt, daß durch eine solche Information die unbekannte Zahl x bestimmt ist, nennt man eine solche Gleichung auch **Bestimmungsgleichung** für x. Zahlen, die für x in Frage kommen, heißen **Lösungen** der Gleichung.
Die Methoden, die zur Bestimmung von x, d.h. zur Lösung der Gleichung führen, werden wir im Abschnitt **4.2.2** kennenlernen.

Aufgaben

1. Schreibe als Bestimmungsgleichung für x die folgenden Aufgaben aus dem *Papyrus Rhind:*
   a) *Aufgabe 25*: Haufen, seine Hälfte zu ihm, es macht 16.
   b) *Aufgabe 26*: Haufen, sein Viertel zu ihm, es macht 15.
   c) *Aufgabe 27*: Haufen, sein Fünftel zu ihm, es macht 21.

2. Im Museum der Schönen Künste in Moskau wird ein mathematischer Papyrus aufbewahrt, der noch etwas älter als der *Papyrus Rhind* ist. Er heißt *Moskauer Papyrus*. Er ist nur 8 cm breit und 5,44 m lang und enthält 25 Probleme, von denen allerdings die meisten fast unleserlich sind.
Schreibe als Bestimmungsgleichung für x die folgenden Aufgaben aus dem *Moskauer Papyrus*:
   a) *Problem 25*: Haufen, zweimal genommen, und noch ein Haufen, es ergibt 9.
   b) *Problem 19*: Haufen, eineinhalb davon, zusammen mit 4, es ergibt 10.

3. Ich denke mir eine Zahl, vervierfache sie und subtrahiere dann 6. Wenn ich das Ergebnis halbieren, erhalte ich 10.
Schreibe eine Bestimmungsgleichung für die gedachte Zahl z an.

4.2.1.3 Die Gleichung als Aussageform

$x + \frac{1}{7}x = 19$ ist ein Satz, der eine Variable enthält; also ist er nach Definition 115.1 eine Aussageform. Deuten wir eine Bestimmungsgleichung als Aussageform, so besteht unsere Aufgabe darin, alle Zahlen zu finden, durch die man die Variable x ersetzen kann, so daß dabei aus der Aussageform eine *wahre* Aussage wird. Kurz, wir suchen die Lösungsmenge L der Aussageform.
Im *Papyrus Rhind* wird behauptet, die Lösungsmenge der Aussageform $x + \frac{1}{7}x = 19$ sei $\{16\frac{5}{8}\}$.

* Andere Wissenschaftler meinen aber, 𝔠 sei ursprünglich aus dem Worte *res* entstanden, dann aber doch als *cosa* gelesen worden.

4.2.1.4 Die Probe

Wenn man eine Zahl gefunden hat, von der man vermutet, daß sie eine Lösung der Gleichung ist, dann kann man diese Vermutung durch eine Probe bestätigen oder widerlegen. Dazu ersetzt man die Variable x durch die gefundene Zahl und berechnet *getrennt* die **linke Seite** und die **rechte Seite** der Gleichung. Dabei versteht man unter *linker Seite* einer Gleichung denjenigen Term, der links vom Gleichheitszeichen steht. Wir schreiben dafür kurz LS. Der rechts vom Gleichheitszeichen stehende Term heißt *rechte Seite*, kurz RS. Machen wir also in $x + \frac{1}{7}x = 19$ die Probe für $x = 16\frac{5}{8}$:

$$\begin{aligned} \text{LS} &= 16\tfrac{5}{8} + \tfrac{1}{7} \cdot 16\tfrac{5}{8} = \qquad \text{RS} = 19. \\ &= 16\tfrac{5}{8} + \tfrac{1}{7} \cdot \tfrac{133}{8} = \\ &= 16\tfrac{5}{8} + \tfrac{19}{8} = \\ &= 16\tfrac{5}{8} + 2\tfrac{3}{8} = \\ &= 19. \end{aligned}$$

Wir stellen fest: LS = RS, also ist $16\frac{5}{8}$ eine Lösung der Gleichung $x + \frac{1}{7}x = 19$, was man kurz durch $16\frac{5}{8} \in L$ ausdrücken kann.
Schon im *Papyrus Rhind* ist diese Probe ausgeführt!

Aufgaben

1. *Aufgabe 28* des *Papyrus Rhind* lautet in moderner Form
   $(x + \frac{2}{3}x) - \frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x) = 10.$
   AHMOSE gibt als Lösung $x = 9$ an. Mach die Probe!
2. *Aufgabe 30* des *Papyrus Rhind* lautet in moderner Form
   $\frac{2}{3}x + \frac{1}{10}x = 10.$
   AHMOSE gibt als Lösung $x = 13\frac{1}{23}$ an. Mach die Probe!
3. *Aufgabe 29* des *Papyrus Rhind* lautet in moderner Form
   $\frac{1}{3}[x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x)] = 10.$
   AHMOSE gibt als Lösung $x = 13\frac{1}{2}$ an. Mach die Probe!

•4. *Aufgabe 32* des *Papyrus Rhind* lautet in moderner Form
   $x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 2.$
   AHMOSE gibt als Lösung $x = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{114} + \frac{1}{228}$ an.* Mach die Probe!

5. Für die Bestimmungsgleichung $1\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = \frac{3}{8} + \frac{2}{3}x$ werden die Zahlen 2, $\frac{3}{4}$ und $-\frac{3}{4}$ als Lösungen angeboten. Mach die Probe und entscheide, welche der Zahlen wirklich Lösungen sind.

* Die Ägypter gaben mit Ausnahme von $\frac{2}{3}$ alle anderen Brüche nur als Summe von **Stammbrüchen**, das sind Brüche mit dem Zähler 1, an.

6. Im Algebrabuch des AL-CHARIZMI finden wir eine Aufgabe, die in heutiger Schreibweise als Bestimmungsgleichung so lautet: $x^2 + 15 = 8x$.
Er gibt als Lösungen die Zahlen 3 und 5 an. Sind das Lösungen?

7. Für die Bestimmungsgleichung $x^3 + x^2 = 2x - 2x^3$ werden folgende Lösungen angeboten: $1, -1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0$.
Entscheide durch Proben, welche dieser Zahlen zu der Lösungsmenge gehören.

4.2.1.5 Was kann eine Information leisten?

Wir haben oben gesehen, daß $16\frac{5}{8}$ *eine* Lösung der Gleichung $x + \frac{1}{7}x = 19$ ist. Man wird sich also fragen müssen, ob es noch weitere Lösungen dieser Gleichung gibt oder ob $16\frac{5}{8}$ die einzige Lösung ist.
Falls es keine weitere Lösung gibt, dann wird durch die Information $x + \frac{1}{7}x = 19$ eindeutig eine Zahl x bestimmt. Gibt es aber mehr als eine Lösung, dann ist die Information mehrdeutig.
Allgemein unterscheidet man je nach der Anzahl der Lösungen verschiedene Arten von Informationen.

1) Eine Information ist **eindeutig**, wenn sie genau eine Zahl x bestimmt. Die Lösungsmenge der Aussageform enthält dann eine einzige Zahl.
Unser Informant hat die unbekannte Zahl x genau beschrieben.
Beispiel:
$3x = 2$ ist eine eindeutige Information über x. Denn wegen Satz 72.1 ist $\frac{2}{3}$ die Zahl, die durch sie eindeutig bestimmt ist.
Die Lösungsmenge der Aussageform $3x = 2$ ist die Menge $\{\frac{2}{3}\}$.

2) Manchmal reicht die Information nicht zur eindeutigen Bestimmung der unbekannten Zahl x aus. Der Informant hat die Zahl x also nicht genau genug beschrieben. Somit gibt es mehrere Möglichkeiten für x. Man sagt, die Information sei **mehrdeutig**. Die Lösungsmenge einer solchen Aussageform besteht dann aus mindestens zwei Zahlen.
Beispiel:
$x^2 = 64$.
Die Information reicht nicht aus, die unbekannte Zahl x eindeutig zu ermitteln. Wir können nämlich sagen, daß sowohl $+8$ als auch -8 Lösungen sind.

3) Je mehr Möglichkeiten es für die unbekannte Zahl x gibt, desto wertloser ist die Information zur Bestimmung der unbekannten Zahl x. Ganz schlimm wird es, wenn uns der Informant an der Nase herumführt und wir für die unbekannte Zahl x *jede* Zahl nehmen können. Die Information ist also allgemein gültig.
Wir merken uns

Definition 124.1:	Eine Gleichung heißt **allgemeingültig**, wenn *jede* Zahl Lösung der Gleichung ist.

Beispiel:

$x + 1 = 1 + x.$

Jede Zahl ist Lösung dieser Gleichung. Also ist sie allgemeingültig. Die Lösungsmenge der Aussageform $x + 1 = 1 + x$ ist die Menge $\mathbb{Q}$.

4) Andererseits kann es aber vorkommen, daß es solch eine Zahl, wie sie durch die Information beschrieben wird, gar nicht gibt. Der Informant hat uns also angeschwindelt!
Wir merken uns

> **Definition 125.1:** Eine Gleichung heißt **widersprüchlich**, wenn *keine* Zahl Lösung der Gleichung ist.

Beispiel:

$x + 1 = x.$

Es gibt keine Zahl x, deren Wert sich nicht ändert, wenn man 1 dazuzählt. Also ist die Gleichung widersprüchlich.
Die Lösungsmenge der Aussageform $x + 1 = x$ ist die leere Menge $\{\,\}$, für die man auch $\emptyset$ schreibt.

Aufgaben

Bei den folgenden Aufgaben soll entschieden werden, welche Art von Gleichung vorliegt. Gib jedesmal die Lösungsmenge an.

1. a) $x + 3 = -18$ b) $x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x$ c) $-3\frac{1}{2}x = 3\frac{1}{2}$ d) $x^2 = 256$
e) $x^4 = 16$ f) $\frac{x}{x} = 3$ g) $\frac{x}{x} = 1$ h) $\frac{x}{x} = 0$

2. a) $-0{,}02x + 0{,}02 = 0{,}02$ b) $-0{,}02x + 0{,}02 = -0{,}02x$
c) $-2x^2 = -2{,}88$ d) $x + x = 2x$ e) $x^2 = -4$

• 3. a) $\frac{x+1}{x} = 1$ b) $\frac{x+1}{x} = 0$ c) $9x^2 = 1024$
d) $x(x+3) = 0$ e) $3 \cdot (x+2) = 3x + 6$

4.2.2 Äquivalenzumformungen von Gleichungen

4.2.2.1 Äquivalenz von Gleichungen

Der einfachste Gleichungstyp ist von der Bauart $x = 7$. Eine Lösung dieser Gleichung liest man direkt ab, nämlich 7. Weitere Lösungen gibt es nicht, da man mit keiner von 7 verschiedenen Zahl an Stelle von x eine wahre Aussage erhält. Die Information über die gesuchte Zahl ist also eindeutig. Die gesuchte Zahl ist 7.