Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

4.2.1.4 Die Probe

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

4.2.1.4 Die Probe

Wenn man eine Zahl gefunden hat, von der man vermutet, daß sie eine Lösung der Gleichung ist, dann kann man diese Vermutung durch eine Probe bestätigen oder widerlegen. Dazu ersetzt man die Variable x durch die gefundene Zahl und berechnet *getrennt* die **linke Seite** und die **rechte Seite** der Gleichung. Dabei versteht man unter *linker Seite* einer Gleichung denjenigen Term, der links vom Gleichheitszeichen steht. Wir schreiben dafür kurz LS. Der rechts vom Gleichheitszeichen stehende Term heißt *rechte Seite*, kurz RS. Machen wir also in $x + \frac{1}{7}x = 19$ die Probe für $x = 16\frac{5}{8}$:

$$\begin{aligned} \text{LS} &= 16\tfrac{5}{8} + \tfrac{1}{7} \cdot 16\tfrac{5}{8} = \qquad\qquad \text{RS} = 19.\\ &= 16\tfrac{5}{8} + \tfrac{1}{7} \cdot \tfrac{133}{8} = \\ &= 16\tfrac{5}{8} + \tfrac{19}{8} = \\ &= 16\tfrac{5}{8} + 2\tfrac{3}{8} = \\ &= 19. \end{aligned}$$

Wir stellen fest: LS = RS, also ist $16\frac{5}{8}$ eine Lösung der Gleichung $x + \frac{1}{7}x = 19$, was man kurz durch $16\frac{5}{8} \in L$ ausdrücken kann.
Schon im *Papyrus Rhind* ist diese Probe ausgeführt!

Aufgaben

1. *Aufgabe 28* des *Papyrus Rhind* lautet in moderner Form
   $(x + \frac{2}{3}x) - \frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x) = 10$.
   AHMOSE gibt als Lösung $x = 9$ an. Mach die Probe!
2. *Aufgabe 30* des *Papyrus Rhind* lautet in moderner Form
   $\frac{2}{3}x + \frac{1}{10}x = 10$.
   AHMOSE gibt als Lösung $x = 13\frac{1}{23}$ an. Mach die Probe!
3. *Aufgabe 29* des *Papyrus Rhind* lautet in moderner Form
   $\frac{1}{3}[x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x)] = 10$.
   AHMOSE gibt als Lösung $x = 13\frac{1}{2}$ an. Mach die Probe!
•4. *Aufgabe 32* des *Papyrus Rhind* lautet in moderner Form
   $x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 2$.
   AHMOSE gibt als Lösung $x = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{114} + \frac{1}{228}$ an.* Mach die Probe!
5. Für die Bestimmungsgleichung $1\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = \frac{3}{8} + \frac{2}{3}x$ werden die Zahlen 2, $\frac{3}{4}$ und $-\frac{3}{4}$ als Lösungen angeboten. Mach die Probe und entscheide, welche der Zahlen wirklich Lösungen sind.

* Die Ägypter gaben mit Ausnahme von $\frac{2}{3}$ alle anderen Brüche nur als Summe von **Stammbrüchen**, das sind Brüche mit dem Zähler 1, an.

6. Im Algebrabuch des AL-CHARIZMI finden wir eine Aufgabe, die in heutiger Schreibweise als Bestimmungsgleichung so lautet: $x^2 + 15 = 8x$.
Er gibt als Lösungen die Zahlen 3 und 5 an. Sind das Lösungen?

7. Für die Bestimmungsgleichung $x^3 + x^2 = 2x - 2x^3$ werden folgende Lösungen angeboten: $1, -1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0$.
Entscheide durch Proben, welche dieser Zahlen zu der Lösungsmenge gehören.

4.2.1.5 Was kann eine Information leisten?

Wir haben oben gesehen, daß $16\frac{5}{8}$ *eine* Lösung der Gleichung $x + \frac{1}{7}x = 19$ ist. Man wird sich also fragen müssen, ob es noch weitere Lösungen dieser Gleichung gibt oder ob $16\frac{5}{8}$ die einzige Lösung ist.
Falls es keine weitere Lösung gibt, dann wird durch die Information $x + \frac{1}{7}x = 19$ eindeutig eine Zahl x bestimmt. Gibt es aber mehr als eine Lösung, dann ist die Information mehrdeutig.
Allgemein unterscheidet man je nach der Anzahl der Lösungen verschiedene Arten von Informationen.

1) Eine Information ist **eindeutig**, wenn sie genau eine Zahl x bestimmt. Die Lösungsmenge der Aussageform enthält dann eine einzige Zahl.
Unser Informant hat die unbekannte Zahl x genau beschrieben.
Beispiel:
$3x = 2$ ist eine eindeutige Information über x. Denn wegen Satz 72.1 ist $\frac{2}{3}$ die Zahl, die durch sie eindeutig bestimmt ist.
Die Lösungsmenge der Aussageform $3x = 2$ ist die Menge $\{\frac{2}{3}\}$.

2) Manchmal reicht die Information nicht zur eindeutigen Bestimmung der unbekannten Zahl x aus. Der Informant hat die Zahl x also nicht genau genug beschrieben. Somit gibt es mehrere Möglichkeiten für x. Man sagt, die Information sei **mehrdeutig**. Die Lösungsmenge einer solchen Aussageform besteht dann aus mindestens zwei Zahlen.
Beispiel:
$x^2 = 64$.
Die Information reicht nicht aus, die unbekannte Zahl x eindeutig zu ermitteln. Wir können nämlich sagen, daß sowohl $+8$ als auch -8 Lösungen sind.

3) Je mehr Möglichkeiten es für die unbekannte Zahl x gibt, desto wertloser ist die Information zur Bestimmung der unbekannten Zahl x. Ganz schlimm wird es, wenn uns der Informant an der Nase herumführt und wir für die unbekannte Zahl x *jede* Zahl nehmen können. Die Information ist also allgemein gültig.
Wir merken uns

> **Definition 124.1:** Eine Gleichung heißt **allgemeingültig**, wenn *jede* Zahl Lösung der Gleichung ist.