



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

4.2.1.5 Was kann eine Information leisten?

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83493](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83493)

6. Im Algebrabuch des AL-CHARIZMI finden wir eine Aufgabe, die in heutiger Schreibweise als Bestimmungsgleichung so lautet: $x^2 + 15 = 8x$. Er gibt als Lösungen die Zahlen 3 und 5 an. Sind das Lösungen?
7. Für die Bestimmungsgleichung $x^3 + x^2 = 2x - 2x^3$ werden folgende Lösungen angeboten: $1, -1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0$. Entscheide durch Proben, welche dieser Zahlen zu der Lösungsmenge gehören.

4.2.1.5 Was kann eine Information leisten?

Wir haben oben gesehen, daß $16\frac{5}{8}$ eine Lösung der Gleichung $x + \frac{1}{7}x = 19$ ist. Man wird sich also fragen müssen, ob es noch weitere Lösungen dieser Gleichung gibt oder ob $16\frac{5}{8}$ die einzige Lösung ist.

Falls es keine weitere Lösung gibt, dann wird durch die Information $x + \frac{1}{7}x = 19$ eindeutig eine Zahl x bestimmt. Gibt es aber mehr als eine Lösung, dann ist die Information mehrdeutig.

Allgemein unterscheidet man je nach der Anzahl der Lösungen verschiedene Arten von Informationen.

- 1) Eine Information ist **eindeutig**, wenn sie genau eine Zahl x bestimmt. Die Lösungsmenge der Aussageform enthält dann eine einzige Zahl. Unser Informant hat die unbekannte Zahl x genau beschrieben.

Beispiel:

$3x = 2$ ist eine eindeutige Information über x . Denn wegen Satz 72.1 ist $\frac{2}{3}$ die Zahl, die durch sie eindeutig bestimmt ist.

Die Lösungsmenge der Aussageform $3x = 2$ ist die Menge $\{\frac{2}{3}\}$.

- 2) Manchmal reicht die Information nicht zur eindeutigen Bestimmung der unbekannten Zahl x aus. Der Informant hat die Zahl x also nicht genau genug beschrieben. Somit gibt es mehrere Möglichkeiten für x . Man sagt, die Information sei **mehrdeutig**. Die Lösungsmenge einer solchen Aussageform besteht dann aus mindestens zwei Zahlen.

Beispiel:

$$x^2 = 64.$$

Die Information reicht nicht aus, die unbekannte Zahl x eindeutig zu ermitteln. Wir können nämlich sagen, daß sowohl $+8$ als auch -8 Lösungen sind.

- 3) Je mehr Möglichkeiten es für die unbekannte Zahl x gibt, desto wertloser ist die Information zur Bestimmung der unbekannten Zahl x . Ganz schlimm wird es, wenn uns der Informant an der Nase herumführt und wir für die unbekannte Zahl x *jede* Zahl nehmen können. Die Information ist also allgemein gültig.

Wir merken uns

Definition 124.1: Eine Gleichung heißt **allgemeingültig**, wenn *jede* Zahl Lösung der Gleichung ist.

Beispiel:

$$x + 1 = 1 + x.$$

Jede Zahl ist Lösung dieser Gleichung. Also ist sie allgemeingültig.

Die Lösungsmenge der Aussageform $x + 1 = 1 + x$ ist die Menge \mathbb{Q} .

- 4) Andererseits kann es aber vorkommen, daß es solch eine Zahl, wie sie durch die Information beschrieben wird, gar nicht gibt. Der Informant hat uns also angeschwindelt!
Wir merken uns

Definition 125.1: Eine Gleichung heißt **widersprüchlich**, wenn *keine* Zahl Lösung der Gleichung ist.

Beispiel:

$$x + 1 = x.$$

Es gibt keine Zahl x , deren Wert sich nicht ändert, wenn man 1 dazu zählt. Also ist die Gleichung widersprüchlich.

Die Lösungsmenge der Aussageform $x + 1 = x$ ist die leere Menge $\{\}$, für die man auch \emptyset schreibt.

Aufgaben

Bei den folgenden Aufgaben soll entschieden werden, welche Art von Gleichung vorliegt. Gib jedesmal die Lösungsmenge an.

1. a) $x + 3 = -18$ b) $x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x$ c) $-3\frac{1}{2}x = 3\frac{1}{2}$ d) $x^2 = 256$
 e) $x^4 = 16$ f) $\frac{x}{x} = 3$ g) $\frac{x}{x} = 1$ h) $\frac{x}{x} = 0$
2. a) $-0,02x + 0,02 = 0,02$ b) $-0,02x + 0,02 = -0,02x$
 c) $-2x^2 = -2,88$ d) $x + x = 2x$ e) $x^2 = -4$
- 3. a) $\frac{x+1}{x} = 1$ b) $\frac{x+1}{x} = 0$ • c) $9x^2 = 1024$
 d) $x(x+3) = 0$ e) $3 \cdot (x+2) = 3x+6$

4.2.2 Äquivalenzumformungen von Gleichungen**4.2.2.1 Äquivalenz von Gleichungen**

Der einfachste Gleichungstyp ist von der Bauart $x = 7$. Eine Lösung dieser Gleichung liest man direkt ab, nämlich 7. Weitere Lösungen gibt es nicht, da man mit keiner von 7 verschiedenen Zahl an Stelle von x eine wahre Aussage erhält. Die Information über die gesuchte Zahl ist also eindeutig. Die gesuchte Zahl ist 7.