Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

4.2.2 Äquivalenzumformumgen von Gleichungen

Beispiel:

$x + 1 = 1 + x.$

Jede Zahl ist Lösung dieser Gleichung. Also ist sie allgemeingültig. Die Lösungsmenge der Aussageform $x + 1 = 1 + x$ ist die Menge $\mathbb{Q}$.

4) Andererseits kann es aber vorkommen, daß es solch eine Zahl, wie sie durch die Information beschrieben wird, gar nicht gibt. Der Informant hat uns also angeschwindelt!
Wir merken uns

Definition 125.1: Eine Gleichung heißt **widersprüchlich**, wenn *keine* Zahl Lösung der Gleichung ist.

Beispiel:

$x + 1 = x.$

Es gibt keine Zahl x, deren Wert sich nicht ändert, wenn man 1 dazuzählt. Also ist die Gleichung widersprüchlich.
Die Lösungsmenge der Aussageform $x + 1 = x$ ist die leere Menge $\{\,\}$, für die man auch $\emptyset$ schreibt.

Aufgaben

Bei den folgenden Aufgaben soll entschieden werden, welche Art von Gleichung vorliegt. Gib jedesmal die Lösungsmenge an.

1. **a)** $x + 3 = -18$ **b)** $x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x$ **c)** $-3\frac{1}{2}x = 3\frac{1}{2}$ **d)** $x^2 = 256$
e) $x^4 = 16$ **f)** $\frac{x}{x} = 3$ **g)** $\frac{x}{x} = 1$ **h)** $\frac{x}{x} = 0$

2. **a)** $-0{,}02x + 0{,}02 = 0{,}02$ **b)** $-0{,}02x + 0{,}02 = -0{,}02x$
c) $-2x^2 = -2{,}88$ **d)** $x + x = 2x$ **e)** $x^2 = -4$

•**3.** **a)** $\frac{x+1}{x} = 1$ **b)** $\frac{x+1}{x} = 0$ **:c)** $9x^2 = 1024$
d) $x(x + 3) = 0$ **e)** $3 \cdot (x + 2) = 3x + 6$

4.2.2 Äquivalenzumformungen von Gleichungen

4.2.2.1 Äquivalenz von Gleichungen

Der einfachste Gleichungstyp ist von der Bauart $x = 7$. Eine Lösung dieser Gleichung liest man direkt ab, nämlich 7. Weitere Lösungen gibt es nicht, da man mit keiner von 7 verschiedenen Zahl an Stelle von x eine wahre Aussage erhält. Die Information über die gesuchte Zahl ist also eindeutig. Die gesuchte Zahl ist 7.

Wir halten fest: Gleichungen der Bauart $x = a$ sind eindeutige Informationen über die gesuchte Zahl x. Die gesuchte Zahl x heißt a, die Lösungsmenge der Gleichung $x = a$ ist die Menge $\{a\}$.
Normalerweise sind Gleichungen viel komplizierter, z.B. $13x - 7 = 5x + 4$. Um solche Gleichungen lösen zu können, formt man sie so lange um, bis man auf den einfachen Typ $x = a$ kommt. Bei diesem Umformen dürfen aber keine Lösungen hinzukommen und auch keine Lösungen verlorengehen. Umformungen, die dies leisten, bekommen einen besonderen Namen.

Definition 126.1: Zwei **Gleichungen** heißen **äquivalent**, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.
Eine Gleichungsumformung heißt **Äquivalenzumformung**, wenn die ursprüngliche Gleichung und die neue Gleichung äquivalent sind.

Unser Ziel ist es nun, Gleichungsumformungen aufzufinden, die als Äquivalenzumformungen zum Lösen von Gleichungen benützt werden können.

Aufgaben

Stelle bei den folgenden Gleichungen fest, ob sie äquivalent sind. Sind Gleichung I und Gleichung II äquivalent, dann kannst du kurz I $\Leftrightarrow$ II schreiben.

1. **a)** I. $x = 3$; II. $13x = 39$ **b)** I. $x + 1 = 2$; II. $x + 9 = 10$
   c) I. $x + 1 = 2$; II. $x + 10 = 9$ **d)** I. $x^2 = 1$; II. $x = 1$
2. **a)** I. $\frac{5}{3}x = \frac{3}{5}$; II. $x^2 = \frac{9}{25}$ **b)** I. $x = x$; II. $0 \cdot x = 0$
   c) I. $10\frac{3}{4} + x = 9\frac{7}{8} + x$; II. $\frac{x}{x} = 2$ **d)** I. $x - x = 0$; II. $1 = 1$

4.2.2.2 Äquivalenzumformung durch Termersetzung

Ersetzt man in einer Gleichung einen Term durch einen äquivalenten, so ändert sich die Lösungsmenge nicht, weil nach Definition 89.1 bei jeder Einsetzung der alte und der neue Term den gleichen Zahlenwert liefern.

Beispiele:

1) $2x + 5 - x = 1 - x - 8$
Vereinfacht man die Terme auf der linken und auf der rechten Seite der Gleichung, so erhält man die äquivalente Gleichung
$x + 5 = -7 - x$.

2) $3(x-5) = \dfrac{14+8x}{4}$

Unter Anwendung der Rechengesetze erhalten wir die äquivalente Gleichung

$3x - 15 = \frac{7}{2} + 2x.$

Durch Termersetzungen können wir die Gleichungen also vereinfachen. Zur vollständigen Lösung brauchen wir allerdings noch weitere Äquivalenzumformungen. Wir werden sie im folgenden kennenlernen. Weil es lästig ist, jedesmal durch einen Zwischentext zu versichern, daß man gerade eine Äquivalenzumformung durchgeführt hat, treffen wir die

Vereinbarung 127.1: Die durch Äquivalenzumformungen entstandene neue Gleichung schreiben wir ohne Kommentar unter die alte Gleichung. Zur Verdeutlichung kann man auch zwischen die äquivalenten Gleichungen das Äquivalenzzeichen $\Leftrightarrow$ setzen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} -2(3-5(x-1)+4)-8 &= \tfrac{7}{3}(x-(9-2x)) \\ -2(7-5x+5)-8 &= \tfrac{7}{3}(x-9+2x) \\ -2(12-5x)-8 &= \tfrac{7}{3}(3x-9) \\ -24+10x-8 &= 7x-21 \\ 10x-32 &= 7x-21\,. \end{aligned}$$

Der Übersichtlichkeit halber haben wir die äquivalenten Gleichungen im letzten Beispiel so geschrieben, daß die Gleichheitszeichen immer untereinander zu stehen kamen. Dadurch erkennt man gut, wie sich die linke Seite und wie sich die rechte Seite jeweils verändert haben. Gleichungen in dieser Form untereinanderzuschreiben geht natürlich nur, wenn man schon weiß, wieviel Platz die linke Seite in der neuen Zeile brauchen wird. Du wirst es im Heft nicht immer so einrichten können. Eins mußt du aber immer tun: Jede neue Gleichung muß in eine neue Zeile geschrieben werden. Auch bei einfachen Termumformungen darfst du nie in derselben Zeile mit einem $=$-Zeichen weiterschreiben, auch wenn es noch so bequem wäre.
Beachte: Bei Gleichungen gibt es in jeder Zeile nur *ein* Gleichheitszeichen!

Beispiel:

Schreibe **nicht** $x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,
sondern **richtig** mit **zwei** Gleichungen

$$\begin{aligned} & x = 1 + \tfrac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & x = \tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

Aufgaben

1. Vereinfache die folgenden Gleichungen und gib die Lösungsmenge an.

a) $x + 0{,}5x = \frac{7}{2}x - 2x$

b) $\frac{3}{2} \cdot (5x - 2) = 1 - 4$

c) $\dfrac{-15x - 6}{3} + 1{,}5 = 3x - (3 : \frac{3}{8})x$

d) $x - 3(2\frac{1}{6} : 1\frac{6}{7}) = 0$

• **e)** $x(x - 2(x + 5)) = -10x - x^2$

•• **f)** $3\frac{1}{2} \cdot [2 - x(1\frac{1}{2} + 2x) + x(0{,}5 + 2x)] = 7$

2. Die unbekannte Zahl muß nicht immer x heißen! Vereinfache die folgenden Gleichungen und gib die Lösungsmenge an.

a) $[(5 - 3 : 4) \cdot 6 - 22] \cdot y = 0$

b) $[(5 - 3 : 4) \cdot 8 - 34]z = 0$

c) $(0{,}25 - 0{,}35 \cdot \frac{5}{7}) \cdot u = 1{,}55 \cdot \frac{20}{31} - 2$

d) $y \cdot (9 : 4 \cdot 6 - 9 : 6 \cdot 4 - 4 : 6 \cdot 9 - 0{,}5) = 6 : 4 : 9$

e) $14\frac{1}{2}z - 8\frac{1}{3}z - 5\frac{1}{6}z = 5\frac{1}{6} - 8\frac{1}{3} - 14\frac{1}{2}$

3. Vereinfache und gib die Lösungsmenge an.

a) $[2{,}6 + (1\frac{1}{2} - 2\frac{4}{5}) \cdot 2]x = \frac{1}{2}[2 - \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) - 1{,}25]$

b) $[\frac{7}{3} \cdot 4\frac{1}{14} - (2{,}64 - 4{,}14)(-\frac{19}{3})]y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$

4.2.2.3 Äquivalenzumformung durch Addition von Termen

Bei der Gleichung $x - 3\frac{1}{2} = 7\frac{3}{4}$ sind beide Seiten schon so einfach wie möglich. Wir benötigen nun eine neue Äquivalenzumformung, die diese Gleichung auf die Form $x = a$ bringt. Dazu überlegen wir:
Wenn eine Gleichung eine Lösung besitzt, dann steht, wenn man sie sich eingesetzt denkt, links und rechts vom Gleichheitszeichen dieselbe Zahl. Addiert man nun auf beiden Seiten der Gleichung Gleiches, dann ergibt sich auf beiden Seiten die gleiche Summe. Um also zu erreichen, daß die unbekannte Zahl x alleine auf der linken Seite übrigbleibt – wir sagen kurz, wir wollen x **isolieren** –, müssen wir in unserem Beispiel auf beiden Seiten $3\frac{1}{2}$ addieren. Dieses Vorgehen deuten wir dadurch an, daß wir hinter die Gleichung zwei senkrechte Striche setzen und dahinter $+3\frac{1}{2}$ schreiben. Nun führen wir es vor:

$$\begin{aligned} x - 3\tfrac{1}{2} &= 7\tfrac{3}{4} \qquad \| + 3\tfrac{1}{2} \\ (x - 3\tfrac{1}{2}) + 3\tfrac{1}{2} &= 7\tfrac{3}{4} + 3\tfrac{1}{2} \\ x - 3\tfrac{1}{2} + 3\tfrac{1}{2} &= 11\tfrac{1}{4} \\ x &= 11\tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

Die gesuchte Zahl ist also $11\frac{1}{4}$.

Die obigen Überlegungen können wir verallgemeinern auf Terme, da Terme wie Zahlen behandelt werden. Es gilt

Satz 129.1: Die Addition desselben Terms auf *beiden* Seiten einer Gleichung ist eine Äquivalenzumformung; kurz

$$T_1 = T_2 \quad \| + T$$
$$\Leftrightarrow T_1 + T = T_2 + T$$

Zur **Begründung** überlegen wir uns:

1) Ist a eine Lösung der Gleichung $T_1 = T_2$, dann gilt

$T_1(a) = T_2(a)$, also auch
$T_1(a) + T(a) = T_2(a) + T(a)$.

Damit ist a auch eine Lösung der durch Termaddition umgeformten Gleichung $T_1 + T = T_2 + T$. Es gehen also bei der Umformung durch Termaddition sicherlich keine Lösungen verloren.

2) Ist umgekehrt b eine Lösung der umgeformten Gleichung $T_1 + T = T_2 + T$, dann gilt

$T_1(b) + T(b) = T_2(b) + T(b)$.

Addiert man auf beiden Seiten $-T(b)$, dann erhält man

$T_1(b) = T_2(b)$.

Das heißt aber, daß b auch eine Lösung der Gleichung $T_1 = T_2$ ist. Es kann bei der Umformung durch Termaddition also auch keine Lösung hinzugekommen sein.

Da somit bei der Termaddition weder Lösungen hinzugekommen sind noch verlorengegangen sind, stimmt die Lösungsmenge der Gleichung $T_1 = T_2$ mit der Lösungsmenge der Gleichung $T_1 + T = T_2 + T$ überein; die Umformung durch Addition von Termen ist also eine Äquivalenzumformung.

In der Sprache der Mengenlehre läßt sich die obige Überlegung kurz so schreiben, wenn L die Lösungsmenge von $T_1 = T_2$ und L' die von $T_1 + T = T_2 + T$ bedeuten und das Zeichen $\Rightarrow$ als Abkürzung für »daraus folgt« steht:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ a \in L \Rightarrow a \in L', \text{ d.h. } L \subset L' \\ 2)\ b \in L' \Rightarrow b \in L, \text{ d.h. } L' \subset L \end{array}\right\} \Rightarrow L = L'$$

Zum Einüben eine etwas anspruchsvollere Gleichung:

Beispiel 1:

$3x - 7 = 19 + 2x$. Wir wollen x auf der linken Seite isolieren. Dazu muß 7 auf beiden Seiten addiert und $2x$ auf beiden Seiten subtrahiert werden, d.h., auf beiden Seiten muß der Term $T = 7 - 2x$ addiert werden. Die Rechnung sieht also so aus:

$$\begin{aligned} 3x - 7 &= 19 + 2x \qquad \| \ +7 - 2x \\ (3x - 7) + (7 - 2x) &= (19 + 2x) + (7 - 2x) \\ 3x - 7 + 7 - 2x &= 19 + 2x + 7 - 2x \\ x &= 26. \end{aligned}$$

Mit einiger Übung kannst du durch Kopfrechnen gleich von der 1. zur 4. Zeile kommen!

Es ist nicht günstig, die unbekannte Zahl auf der linken Seite zu isolieren, wenn dort die unbekannte Zahl weniger oft vorkommt als auf der rechten Seite. In einem solchen Fall isoliert man die unbekannte Zahl eben auf der rechten Seite!

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} -3{,}5x + 1{,}4 &= -2{,}5x + 0{,}1 \qquad \| + 3{,}5x - 0{,}1 \\ 1{,}3 &= x \end{aligned}$$

Aufgaben

1. **a)** $25 + x = 42$ **b)** $x + 56 = 38$ **c)** $2{,}65 + x = 2\frac{13}{20}$
d) $\frac{5}{7} = x + \frac{3}{4}$ **e)** $-28{,}1 = 16{,}5 + x$ **f)** $17\frac{5}{16} = \frac{52}{3} + x$
g) $\frac{2}{3} - 1{,}5 + 4 \cdot \frac{3}{7} = z - \frac{1}{14}$ **h)** $-8\frac{5}{36} + 2\frac{7}{24} = z - \frac{5}{27}$

2. **a)** $2x - 1 = x - 1$ **b)** $16{,}3x - \frac{1}{8} = 17{,}3x + 2\frac{1}{4}$
c) $\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} = 1{,}75 + 1{,}75x$ **d)** $\frac{5}{14}x = -\frac{9}{14}x$
e) $\frac{13}{8}x + 7 = 3 + 1{,}625x$ **f)** $-2{,}5x - 0{,}8145 = -1{,}804 - 3{,}5x$

3. **a)** $1 - [2 - (x - 5)] = 5 - (19 - 9)$ **b)** $126 + 7x = \left(\frac{x}{5} - 44\right) \cdot 30$
c) $7{,}5 - 2{,}4x = (3{,}1x - 9) \cdot 2 - 9{,}6x$ **d)** $\frac{x}{2} - \frac{x}{8} = 2 + \frac{x}{4} - \frac{7}{8}x$
e) $\frac{4}{7}x + \frac{2}{3}x - 13 = \frac{1}{6}x + \frac{1}{14}x$ **f)** $\frac{4}{5}x + 18 = \frac{x}{3} - 0{,}2x + 2\left(1 - \frac{x}{6}\right)$

4. **a)** $11x - 2(x - 1) = 5(2x - 3) - (1 + 2x)$
b) $x + 2[x + 3(x + 4)] = 15 + 8x$
c) $1 - 5(4x + 11) = 5[3x - 7(2x - 1)] + 6(6x - 14)$
d) $1{,}5(3 - 5x) - [4(2{,}8 + 0{,}3x) - 10] + 9x = 0{,}3x$
e) $[(x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}] \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{x}{2} - \frac{5}{4}x$

4.2.2.4 Äquivalenzumformung durch Multiplikation mit Termen

Bei der Gleichung $8x = 15$ sind beide Seiten schon so einfach wie möglich. Wir benötigen nun eine neue Äquivalenzumformung, die diese Gleichung auf die Form $x = a$ bringt. Dazu überlegen wir:
Wenn eine Gleichung eine Lösung besitzt, dann steht, wenn man diese sich eingesetzt denkt, rechts und links vom Gleichheitszeichen dieselbe Zahl. Multipliziert man nun beide Seiten der Gleichung mit dem gleichen Faktor, dann stellt sich auf beiden Seiten dasselbe Ergebnis ein. Um bei unserer Gleichung x zu isolieren, müssen wir also beide Seiten mit $\frac{1}{8}$ multiplizieren oder beide Seiten durch 8 dividieren.
Wir führen es vor:

$$8x = 15 \quad \| \cdot \tfrac{1}{8} \qquad \text{oder} \qquad 8x = 15 \quad \| : 8$$

$$(8x) \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{15}{8} \qquad\qquad \frac{8x}{8} = \frac{15}{8}$$

$$8x \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{15}{8} \qquad\qquad x = \tfrac{15}{8}$$

$$x = \tfrac{15}{8}$$

Die gesuchte Zahl ist also $\frac{15}{8}$.
Die obigen Überlegungen können wir verallgemeinern auf Terme, da Terme wie Zahlen behandelt werden. Es gilt

> **Satz 131.1:** Die Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit einem Term ist eine Äquivalenzumformung, falls der Term nicht null ist.
>
> Kurz: $$\begin{aligned} & T_1 = T_2 \quad \| \cdot T \qquad (T \neq 0) \\ \Leftrightarrow\ & T_1 \cdot T = T_2 \cdot T \end{aligned}$$

Zur **Begründung** überlegen wir uns:

1) Ist a eine Lösung der Gleichung $T_1 = T_2$, dann gilt
$T_1(a) = T_2(a)$, also auch
$T_1(a) \cdot T(a) = T_2(a) \cdot T(a)$.
Damit ist a auch eine Lösung der durch Termmultiplikation entstandenen Gleichung. Es gehen also bei der Umformung durch Termmultiplikation sicher keine Lösungen verloren.

2) Ist umgekehrt b eine Lösung der umgeformten Gleichung $T_1 \cdot T = T_2 \cdot T$, dann gilt
$T_1(b) \cdot T(b) = T_2(b) \cdot T(b)$.
Multipliziert man beide Seiten mit $\dfrac{1}{T(b)}$, was natürlich nur für $T(b) \neq 0$ möglich ist, dann erhält man
$T_1(b) = T_2(b)$.

Das heißt aber, daß b auch eine Lösung der Gleichung $T_1 = T_2$ ist. Es kann also bei der Umformung durch Termmultiplikation auch keine Lösung hinzugekommen sein, wenn $T(b) \neq 0$ gilt.
Da somit bei der Termmultiplikation weder Lösungen hinzugekommen sind noch verlorengegangen sind, stimmt die Lösungsmenge der Gleichung $T_1 = T_2$ mit der Lösungsmenge der Gleichung $T_1 \cdot T = T_2 \cdot T$ überein; die Umformung durch Multiplikation mit Termen $(\neq 0)$ ist also eine Äquivalenzumformung.

Zum Einüben zwei etwas anspruchsvollere Gleichungen.

Beispiel 1: $7\frac{1}{3}x = -5\frac{1}{2}$

Zum Rechnen verwandeln wir die gemischten Zahlen besser in gemeine Brüche:

$\frac{22}{3}x = -\frac{11}{2}$

Nun multiplizieren wir die Gleichung mit $\frac{3}{22}$, um x zu isolieren:

$$\frac{22}{3}x = -\frac{11}{2} \quad \| \cdot \frac{3}{22}$$

$$x = -\frac{11 \cdot 3}{2 \cdot 22}$$

$$x = -\frac{3}{4}.$$

Beispiel 2: $27{,}2 = -0{,}06x \quad \| : (-0{,}06)$

$$\frac{27{,}2}{0{,}06} = x$$

Weil $a = b$ dasselbe bedeutet wie $b = a$, vertauschen wir der leichteren Lesbarkeit halber die beiden Seiten und vereinfachen weiter.

$$x = -\frac{2720}{6}$$

$$x = -\frac{1360}{3}.$$

Aufgaben

1. a) $2x = 5$ b) $\frac{1}{2}x = 3$ c) $\frac{2}{3}x = 9$
2. a) $5x = -2$ b) $2\frac{1}{2}x = -1$ c) $-3\frac{1}{2} = \frac{1}{4}x$
3. a) $-x = 7{,}1$ b) $(-2)x = 1$ c) $-0{,}1x = 0{,}01$
4. a) $-2{,}5x = 5\frac{5}{7}$ b) $3 - \frac{1}{5} = -\frac{5}{11}x$ c) $\frac{x}{27} = \frac{1}{18}$
5. a) $9 : 14 = \frac{x}{84}$ b) $-80 = x : 6$ c) $\frac{2x}{5} = 3 \cdot 2\frac{1}{6}$
6. a) $\frac{x}{7} = 4$ b) $-\frac{x}{2} = 7{,}8$ c) $-\frac{9}{8} = -\frac{8x}{9}$
7. a) $\frac{5}{6}x = -\frac{5}{4} + 1$ b) $x : 17{,}5 = 5{,}25 \cdot 0{,}01$ c) $\frac{x}{49{,}6} = 4{,}3 : 18{,}6$
8. a) $\frac{7}{9}(-x) = \frac{1}{-3}$ b) $(-x) : 1024 = \frac{17}{128}$ c) $\frac{-2{,}198}{-0{,}7} = -3{,}14(-x)$

4.2.2.5 Mehrfache Äquivalenzumformungen

In den meisten Fällen wird man nicht mit einer der drei im letzten Abschnitt behandelten Äquivalenzumformungen allein auskommen. Fast immer braucht man alle drei! Betrachten wir etwa die Gleichung

$$97 + 2x - (19x - 15) + 3 = 107 - 7x - (11x - (5 + 3x)).$$

Zuerst vereinfachen wir beide Seiten durch Termersetzungen:

$$\begin{aligned} 100 + 2x - 19x + 15 &= 107 - 7x - (11x - 5 - 3x) \\ 115 - 17x &= 107 - 7x - (8x - 5) \\ 115 - 17x &= 107 - 7x - 8x + 5 \\ 115 - 17x &= 112 - 15x. \end{aligned}$$

Durch Addition von Termen sorgen wir jetzt dafür, daß alle x-Glieder auf der einen und alle von x freien Glieder auf der anderen Seite stehen. Der Bequemlichkeit halber achten wir darauf, daß der Faktor bei x positiv ist.

$$\begin{aligned} 115 - 17x &= 112 - 15x \quad \| + 17x - 112 \\ 3 &= 2x. \end{aligned}$$

Durch Vertauschen der Seiten erhalten wir die gewohnte Form

$$2x = 3.$$

Zum Abschluß isolieren wir x durch Multiplikation mit $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} 2x &= 3 \quad \| \cdot \tfrac{1}{2} \\ x &= \tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

Die drei Äquivalenzumformungen reichen aus, um jede Gleichung, in der die Unbekannte nicht in zweiter oder gar in höherer Potenz vorkommt, zu lösen. Weil $x^1 = x$ gilt, sagt man auch: Die Unbekannte kommt in der Gleichung nur in der ersten Potenz vor. Für solche Gleichungen hat man einen eigenen Namen eingeführt.

> **Definition 133.1:** Eine Gleichung, in der die Unbekannte nur in der ersten Potenz vorkommt, heißt **lineare Gleichung**.*

Den Weg zur Lösung einer linearen Gleichung fassen wir zusammen in

> **Regel 133.1:** Eine lineare Gleichung löst man durch Äquivalenzumformungen in der folgenden Reihenfolge:
> **1. Vereinfachen**
> **2. Addieren**
> **3. Multiplizieren**

* Zum ersten Mal 1694 belegt als *égalité linéaire* bei Jean PRESTET (1652–1690) in seinen *Nouveaux Élémens des Mathématiques ou Principes généraux de Toutes les Sciences, qui ont les grandeurs pour objet.*

Zur Einübung der Regel betrachten wir noch ein komplizierteres

Beispiel:
$$\begin{aligned}
3\tfrac{3}{4}x-(1\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}x)&=-3\tfrac{3}{4}+(1\tfrac{1}{2}x-(1\tfrac{1}{2}-x))+3\tfrac{3}{5}\\
3\tfrac{3}{4}x-1\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}x&=-\tfrac{3}{20}+(1\tfrac{1}{2}x-1\tfrac{1}{2}+x)\\
3\tfrac{1}{4}x-1\tfrac{1}{2}&=-\tfrac{3}{20}+(2\tfrac{1}{2}x-1\tfrac{1}{2})\\
3\tfrac{1}{4}x-1\tfrac{1}{2}&=-\tfrac{3}{20}+2\tfrac{1}{2}x-1\tfrac{1}{2}\\
3\tfrac{1}{4}x-1\tfrac{1}{2}&=-1\tfrac{13}{20}+2\tfrac{1}{2}x \quad \| -2\tfrac{1}{2}x+1\tfrac{1}{2}\\
\tfrac{3}{4}x&=-\tfrac{3}{20} \quad \| \cdot\tfrac{4}{3}\\
x&=-\tfrac{1}{5}
\end{aligned}$$

Manchmal vereinfacht sich die Rechnung, wenn man als allerersten Schritt die Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert, um die Brüche zu beseitigen.

Beispiel:
$$\frac{5x+12{,}5}{7}-\frac{5(0{,}4-2x)}{6}=\frac{9x-0{,}7}{4}-\frac{7x-1{,}1}{3}+2 \,\|\cdot 84$$
$$\begin{aligned}
12(5x+12{,}5)-14\cdot 5\cdot(0{,}4-2x)&=21(9x-0{,}7)-28(7x-1{,}1)+2\cdot 84\\
60x+150-28+140x&=189x-14{,}7-196x+30{,}8+168\\
200x+122&=-7x+184{,}1 \quad \| +7x-122\\
207x&=62{,}1 \quad \| :207\\
x&=0{,}3
\end{aligned}$$

Aufgaben

1. **a)** $8+6x=20$ **b)** $-3+5x=17$ **c)** $4x-12=44$

2. **a)** $1=13-6x$ **b)** $10=24-7x$ **c)** $-9x-144=-36$

3. **a)** $19-x=100-10x$ **b)** $3x+1=5x-3$ **c)** $19-2x=8x-16$

4. **a)** $4x+15-x=54$ **b)** $5x+2+x=26$ **c)** $-x+8-3x=0$

5. **a)** $17=17-12x+3x$ **b)** $31+x=111-7x$ **c)** $21+8x=30+5x$

6. **a)** $11x-41=10x-31$ **b)** $5x-5=15+3x$ **c)** $4x-16=19-3x$

7. **a)** $8x+22-x=100-11x-42$
b) $9x=7x+16+5x+7-10x$
c) $19+3x-23=10+2x-34$

8. **a)** $29x+39-34x=49-20x-10$
b) $4x+4-7x=-8x+2+5x-4$

9. **a)** $8x-17+x=9x-13-4$
b) $9x-16=10x-9-4x+5$

10. **a)** $0=14-8x+x-3x+x+4$
b) $9x+34-6x-33+2x=9$

11. a) $11x = 8x + 15 + 6x + 6 - 10x$
b) $27x - 9 - 17x + 10 = 45 + 5x - 4$

12. a) $7x - 6 + 5x - 4 + 3x - 2 + x - 4 = 0$
b) $18 = 93 - 6x - 11 - 4x - 5 - 2x + 1$

13. a) $12x - 10 + 8x - 6 + 4x - 8 = 0$
b) $6x - 13 + x - 1 + 12x - 15 - 10x + 2 = 0$

14. a) $19x = 5x + 2 + 5x + 3 + 7x + 3 + 6$
b) $36 + 12x - 19 - x + 10 - 8x = 0$

15. a) $21x - 21 - 7x + 7 = 7x + 21 + 14x - 7 - 19x + 26x$
b) $121x + 49 - 234x + 3 - x = x - 56 - 115x + 108$

16. a) $\frac{x}{4} - \frac{x}{3} + \frac{x}{8} - \frac{x}{6} + \frac{x}{2} + \frac{x}{12} = 11$ **b)** $\frac{7}{3}x + \frac{7}{6} - \frac{7}{2}x + \frac{1}{5} = 3 - \frac{14}{5}x$

17. a) $(-0{,}7)^3 + 5{,}94x - 9{,}02 + 2{,}63x + 11{,}31 = 6{,}24x - 6{,}263 - 1{,}11$
b) $0 = 12{,}9x - 1{,}45x - 3{,}29 - 0{,}99x - 11x + 0{,}32$

18. a) $2x - \frac{2}{3}x - \frac{3}{5}x = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{2}{5}x + 2 - \frac{2}{3}x$
b) $-0{,}5x + 9 = \frac{3}{2}x + 4 - \frac{6}{5}x + 0{,}2$

19. a) $5x - 9 = 3x + 7$ **b)** $2x + 11 = 8x - 10$

20. a) $126 + 7x = \frac{1}{5}x - 44$ **b)** $7{,}5 - 2{,}4x = 3{,}1x - 9$

21. a) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x = 2 + \frac{1}{4}x$ **b)** $\frac{1}{7}x + \frac{1}{3}x - 13 = \frac{1}{6}x$

22. a) $\frac{4}{5}x + 18 = \frac{1}{3}x + 0{,}2x + 2$ **b)** $1{,}5x - 8{,}5 = \frac{19}{24}x$

23. a) $\dfrac{0{,}64}{3}x + 0{,}5x - 0{,}43 = x$ **b)** $\dfrac{2{,}75}{9}x - \dfrac{x}{0{,}72} + x + 6 = 0$

24. a) $\dfrac{2x + 5}{3} = x + 4$ **b)** $\dfrac{8 + 12x}{19} = \dfrac{6x - 7}{4}$

25. a) $\dfrac{3x - 6}{5} - \dfrac{1 - 15x}{2} = 1$ **b)** $\dfrac{13x + 8}{6} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{6 - 11x}{15}$

26. a) $\dfrac{5x}{36} + \dfrac{1}{3} = 0$ **b)** $\dfrac{3x - 7}{5} = 4$

c) $5 = \dfrac{28 + 0{,}7x}{7} + 0{,}85$ **d)** $3 + \dfrac{8 - 11x}{6} = \dfrac{2}{3}$

27. a) $4(2x - 3) = 2(3x - 4)$ **b)** $(25 + 3x) \cdot 7 = (7 + 25x) \cdot 3$

28. a) $13 - 3(5 - x) = 7(x + 1) - 13$
b) $5(2x - 300) - (150 - x) \cdot 2 = 3x$

29. a) $3(1{,}8 + 3x) - 26 = 9 - 5(1{,}5x - 2)$
b) $0{,}75(7x - 16) - 0{,}25(9x - 60) + 1 = 0$
c) $5\left(\frac{x}{3} - 26\right) - 3\left(\frac{x}{4} + 3\right) = \frac{x}{2} - 14$
d) $\frac{1}{7}\left(1 - \frac{2}{3}x\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}(2 - x)$

30. a) $3x + (9 - x) = 13$ **b)** $5x - (1 + 2x) = 11$
c) $-(8 - x) + 2x = 10$

31. a) $9x - 2 - (7 - 2x) = 13$ **b)** $x - (2x - (3x - 1)) = 101$
c) $12x = -12 - (-12x - 12)$ **d)** $5x - (3 - 4x) = 3^2 \cdot (x + 4)$

32. a) $9 - (5x + 2) + (10 + 8x) - (3x - 18) = x + 20$
b) $93 + 2x - (19x - 15) = 100 - 7x - (11x - (5 + 2x))$

33. a) $(25 + 12x) - (10x - 11) = (12 + 6x) - ((12x + 13) - (10x - 11))$
b) $-2x - (4 + (2x - 3)) = (30 - 18x) - (2x - (3x - 5))$

34. a) $5(5 + 2x) = 9 + 4x$ **b)** $0 = 4(10 - 2x) - 3(x - 5)$
c) $3(9 - x) = 5(x - 9)$ **d)** $2^3(x - 3^2) = 3^2(x + 2^3)$

35. a) $1(4x - 3) + 3(9 - 18x) = 10(1 - 3x)$
b) $7(3x - 7) + 5(x - 3) + 4(17 - x) = 103 - 11x$

36. a) $13x - 7(11 - x) + 11 = 4x - 3(20 - x) + 7x$
b) $8(2x - 3) - 5(2x - 8) = 32 - 4(1 - 3x) + 8x$

37. a) $3\tfrac{1}{3}x - 4\tfrac{1}{4} = 5\tfrac{1}{5}x - 6\tfrac{1}{6}$ **b)** $0{,}1x - 0{,}2 = 0{,}3x - 0{,}4$

38. a) $\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{3}{7} = -\tfrac{38}{7}$ **b)** $\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{6}x$

39. a) $10x = 7\tfrac{1}{3}x - 3\tfrac{1}{2}x + 5\tfrac{1}{3}x - 3\tfrac{1}{5}x + 1 + 5x$
b) $x = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{2}{3}x + \tfrac{3}{4}x - \tfrac{3}{5}x + \tfrac{5}{6}$

40. a) $\frac{4x}{3} - \frac{3x}{2} + \frac{4x}{5} + \frac{1}{6} = \frac{9}{5} - x$
b) $-37\frac{13}{30} = \frac{x}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x}{6} - 1\frac{5}{12}x + 2\frac{4}{5} - 3\frac{9}{10}x + 98$

41. a) $47x - 43 = 73 + 41{,}5x + 7{,}2x + 16{,}6$
b) $0 = 1{,}45x - 2{,}7x - 0{,}6x + 0{,}5x - 7{,}8 - 1{,}2$

42. a) $18x - 7{,}52 - 2{,}35x = 5{,}381 - 2{,}9x - 0{,}58 + 13x$
b) $1{,}45x + 3{,}29 = 12{,}9x - 0{,}99x - 11x + 0{,}32$

43. a) $\tfrac{2}{3}(x - 5) - x = 1 + \tfrac{2}{3}(11 - 2x)$
b) $\tfrac{1}{4}(3x - 16) = 2x - 3(5 + \tfrac{3}{4}x) + \tfrac{2}{3}(4 - x)$

44. a) $3x(x+7) - x(3x+7) + 70 = 0$

b) $4x(6-3x) + 6x(2x+1) = 15$

45. $(\frac{3}{7}x - \frac{7}{3}) \cdot 21x - (33x+5) \cdot \frac{3}{11}x = 277$

46. $0{,}32x(1{,}25x - 10) + (6{,}3 - 0{,}8x) \cdot 0{,}5x + 1 = 0$

47. a) $x - (x - (x - (x-1) - 1) - 1) = 0$

b) $1 - 2(x - 3(x - 4(x-5))) = 11(11 - 2x) + 2x$

48. a) $6x - \dfrac{x-3}{2} = 5x + \dfrac{3+x}{2}$ **b)** $\dfrac{-x+3}{2} + 6x = \dfrac{x-3}{2} + 5x$

Die Aufgaben **49** *bis* **51** *sollen den Einfluß von Rundungen zeigen.*

49. a) $3{,}14x - 6{,}28 = -9{,}577$ **b)** $3{,}14x - 6{,}28 = -9{,}58$

c) $3{,}1x - 6{,}3 = -9{,}6$ **d)** $3x - 6 = -10$

50. a) $-1{,}27x + 9{,}51 = 9{,}88 - 1{,}22x$ **b)** $-1{,}3x + 9{,}5 = 9{,}9 - 1{,}2x$

c) $-x + 10 = 10 - x$

51. a) $3{,}14x - 7{,}28 = -8{,}193$ **b)** $3{,}1x - 7{,}3 = -8{,}2$ **c)** $3x - 7 = -8$

52. $25\left(\dfrac{2}{15}x + \dfrac{1}{3}\right) - x + 2\left(\dfrac{x}{6} - 15\right) - 36x = 0$

53. $x + 2[x + 3(x+4)] = 15$

54. $\left[\left(x \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\right) \cdot \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\right] \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{x}{2}$

55. $1 - 5(4x - 11) = 5[3x - 7(2x-1)]$

56. $1{,}5(3 - 5x) - [4(2{,}8 + 0{,}3x) - 10] + 9x = 0$

•**57.** $1 - (2 + 3 \cdot [(3x - 8) - 2(8 - 3x)]) = 5(1 - 2x) - 2$

•**58.** $\left(\left[(x+1) \cdot 2 + \dfrac{1}{2}\right] \cdot 3 + \dfrac{1}{3}\right) \cdot 4 + \dfrac{1}{4} = \left(\left[(x+1) \cdot 2 + \dfrac{x}{2}\right] \cdot 3 + \dfrac{x}{3}\right) \cdot 4 + \dfrac{x}{4}$

59. $5 \cdot \dfrac{x-2}{9} - (2x - 18) \cdot 3 = \dfrac{7}{3} \cdot \dfrac{9x+10}{5}$

•**60.** $\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{3x+5}{6} - \dfrac{2(2x-3) - 24}{5} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{(x-270) \cdot \frac{1}{5}}{9}$

•**61.** $\dfrac{\frac{4}{5}(x+4)}{6} - 3\left(\dfrac{3x-1}{4} - x\right) = 2x - 11$

•**62.** $\dfrac{7\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{2}\right)}{16} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4x + 2{,}5}{8} - 3\left(1 - \dfrac{x}{64}\right) + \dfrac{17}{32} \cdot (x - 2) = \dfrac{1}{192}$

**4.2.2.6. Die Äquivalenzumformungen des AL-CHARIZMI oder was bedeutet Algebra?

Du kennst nun die 3 Äquivalenzumformungen, mit deren Hilfe du lineare Gleichungen lösen kannst. Wir faßten sie kurz zusammen in der Regel »Vereinfachen – Addieren – Multiplizieren«. Diese Äquivalenzumformungen waren von Anbeginn an das Rüstzeug der Mathematiker, die Gleichungen lösen wollten. Ausführlich hat sie AL-CHARIZMI in seinem *al-Kitab al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa-'l-muqabala* beschrieben.

Zuerst rät AL-CHARIZMI dem Leser, so wie wir es dir geraten haben, in einer Gleichung die Nenner zu beseitigen, indem man jedes Glied mit dem Hauptnenner multipliziert. Die Gleichung ist dann einfacher geworden. Dann ersetzt er auf jeder Seite kompliziertere Terme durch einfachere, so wie wir es auch machen. So entsteht z. B.

$$8x + 11 = 13 - 7x.$$

AL-CHARIZMI empfindet das Wegnehmen von $7x$ von der Zahl 13 als etwas, was die 13 verletzt. Er möchte es wiedergutmachen. So wie ein Arzt ein ausgerenktes Glied durch Einrichten wieder voll funktionsfähig macht, so will er die 13 wieder unverletzt sehen. Dazu braucht er bloß auf beiden Seiten $7x$ zu addieren. Diese Äquivalenzumformung des Wiederherstellens nennt AL-CHARIZMI *al-dschabr*. Nun weißt du, was das Wort *al-dschabr*, aus dem *Algebra* entstanden ist, mathematisch bedeutet.
Durch al-dschabr wird aus der obigen Gleichung also die äquivalente Gleichung

$$15x + 11 = 13.$$

Jetzt betrachtet AL-CHARIZMI beide Seiten, d. h., er stellt sie einander gegenüber. Dabei sieht er, daß auf der linken Seite 11 zu $15x$ addiert wird. Er stellt sich vor, daß 11 auch rechts als Summand auftritt, also $13 = 2 + 11$. Durch Subtraktion von 11 auf beiden Seiten kann er diesen Überschuß ausgleichen. Diese Äquivalenzumformung des Vergleichens und Ausgleichens nennt AL-CHARIZMI *al-muqabala*. Nun weißt du auch, was das zweite Wort im Titel seines Algebrabuchs für einen mathematischen Sinn hat.
Durch al-muqabala wird also aus der letzten Gleichung die äquivalente Gleichung

$$15x = 2.$$

Nun muß noch x isoliert werden, d. h., $15x$ muß auf $1x$ zurückgeführt werden. Dies geschieht, indem man die Gleichung durch 15 dividiert; man erhält $x = \frac{2}{15}$. Diese Äquivalenzumformung des Zurückführens auf $1x$ nennt AL-CHARIZMI *al-radd*.
Wäre man aber auf eine Gleichung der Form $\frac{1}{4}x = 6$ gestoßen, dann hätte man $\frac{1}{4}x$ zu $1x$ vervollständigen müssen. Dies geschieht, indem man die Gleichung mit 4 multipliziert; man erhält $x = 24$. Diese Äquivalenzumformung des Vervollständigens auf $1x$ nennt AL-CHARIZMI *al-ikmal*.
Da für uns die Division durch eine Zahl dasselbe ist wie die Multiplikation mit dem Kehrwert dieser Zahl – statt durch 15 zu dividieren, multiplizieren wir mit $\frac{1}{15}$ –, müssen wir die beiden letzten Äquivalenzumformungen nicht unterscheiden und haben sie zusammengefaßt in der Äquivalenzumformung durch Termmultiplikation.
Natürlich war AL-CHARIZMI nicht der erste, der Gleichungen so löste. Der griechische Mathematiker DIOPHANT aus Alexandria (um 250 n. Chr.) beschreibt genau die beiden Äquivalenzumformungen des Wiederherstellens und des Ausgleichens in seinem Werk Ἀριθμητικῶν βιβλία (Arithmetikōn biblía) = *Bücher über die Zahlenlehre*. Aber AL-CHARIZMI hat dieses Werk nicht gekannt. Es wurde erst nach seinem Tode ins Arabische übersetzt.