Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

4.2.2.1 Äquivalenz von Gleichungen

Beispiel:

$x + 1 = 1 + x.$

Jede Zahl ist Lösung dieser Gleichung. Also ist sie allgemeingültig. Die Lösungsmenge der Aussageform $x + 1 = 1 + x$ ist die Menge $\mathbb{Q}$.

4) Andererseits kann es aber vorkommen, daß es solch eine Zahl, wie sie durch die Information beschrieben wird, gar nicht gibt. Der Informant hat uns also angeschwindelt!
Wir merken uns

Definition 125.1: Eine Gleichung heißt **widersprüchlich**, wenn *keine* Zahl Lösung der Gleichung ist.

Beispiel:

$x + 1 = x.$

Es gibt keine Zahl x, deren Wert sich nicht ändert, wenn man 1 dazuzählt. Also ist die Gleichung widersprüchlich.
Die Lösungsmenge der Aussageform $x + 1 = x$ ist die leere Menge $\{\,\}$, für die man auch $\emptyset$ schreibt.

Aufgaben

Bei den folgenden Aufgaben soll entschieden werden, welche Art von Gleichung vorliegt. Gib jedesmal die Lösungsmenge an.

1. **a)** $x + 3 = -18$ **b)** $x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x$ **c)** $-3\frac{1}{2}x = 3\frac{1}{2}$ **d)** $x^2 = 256$
   e) $x^4 = 16$ **f)** $\frac{x}{x} = 3$ **g)** $\frac{x}{x} = 1$ **h)** $\frac{x}{x} = 0$

2. **a)** $-0{,}02x + 0{,}02 = 0{,}02$ **b)** $-0{,}02x + 0{,}02 = -0{,}02x$
   c) $-2x^2 = -2{,}88$ **d)** $x + x = 2x$ **e)** $x^2 = -4$

•3. **a)** $\frac{x+1}{x} = 1$ **b)** $\frac{x+1}{x} = 0$ **c)** $9x^2 = 1024$
   d) $x(x+3) = 0$ **e)** $3 \cdot (x+2) = 3x + 6$

4.2.2 Äquivalenzumformungen von Gleichungen

4.2.2.1 Äquivalenz von Gleichungen

Der einfachste Gleichungstyp ist von der Bauart $x = 7$. Eine Lösung dieser Gleichung liest man direkt ab, nämlich 7. Weitere Lösungen gibt es nicht, da man mit keiner von 7 verschiedenen Zahl an Stelle von x eine wahre Aussage erhält. Die Information über die gesuchte Zahl ist also eindeutig. Die gesuchte Zahl ist 7.

Wir halten fest: Gleichungen der Bauart $x = a$ sind eindeutige Informationen über die gesuchte Zahl x. Die gesuchte Zahl x heißt a, die Lösungsmenge der Gleichung $x = a$ ist die Menge $\{a\}$.
Normalerweise sind Gleichungen viel komplizierter, z. B. $13x - 7 = 5x + 4$. Um solche Gleichungen lösen zu können, formt man sie so lange um, bis man auf den einfachen Typ $x = a$ kommt. Bei diesem Umformen dürfen aber keine Lösungen hinzukommen und auch keine Lösungen verlorengehen. Umformungen, die dies leisten, bekommen einen besonderen Namen.

Definition 126.1: Zwei **Gleichungen** heißen **äquivalent**, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.
Eine Gleichungsumformung heißt **Äquivalenzumformung**, wenn die ursprüngliche Gleichung und die neue Gleichung äquivalent sind.

Unser Ziel ist es nun, Gleichungsumformungen aufzufinden, die als Äquivalenzumformungen zum Lösen von Gleichungen benützt werden können.

Aufgaben

Stelle bei den folgenden Gleichungen fest, ob sie äquivalent sind. Sind Gleichung I und Gleichung II äquivalent, dann kannst du kurz I $\Leftrightarrow$ II schreiben.

1. **a)** I. $x = 3$; II. $13x = 39$ **b)** I. $x + 1 = 2$; II. $x + 9 = 10$
   c) I. $x + 1 = 2$; II. $x + 10 = 9$ **d)** I. $x^2 = 1$; II. $x = 1$
2. **a)** I. $\frac{5}{3}x = \frac{3}{5}$; II. $x^2 = \frac{9}{25}$ **b)** I. $x = x$; II. $0 \cdot x = 0$
   c) I. $10\frac{3}{4} + x = 9\frac{7}{8} + x$; II. $\frac{x}{x} = 2$ **d)** I. $x - x = 0$; II. $1 = 1$

4.2.2.2 Äquivalenzumformung durch Termersetzung

Ersetzt man in einer Gleichung einen Term durch einen äquivalenten, so ändert sich die Lösungsmenge nicht, weil nach Definition 89.1 bei jeder Einsetzung der alte und der neue Term den gleichen Zahlenwert liefern.

Beispiele:

1) $2x + 5 - x = 1 - x - 8$
Vereinfacht man die Terme auf der linken und auf der rechten Seite der Gleichung, so erhält man die äquivalente Gleichung
$x + 5 = -7 - x$.