Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

4.2.2.2 Äquivalenzumformung durch Termersetzung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

Wir halten fest: Gleichungen der Bauart $x = a$ sind eindeutige Informationen über die gesuchte Zahl x. Die gesuchte Zahl x heißt a, die Lösungsmenge der Gleichung $x = a$ ist die Menge $\{a\}$.
Normalerweise sind Gleichungen viel komplizierter, z.B. $13x - 7 = 5x + 4$. Um solche Gleichungen lösen zu können, formt man sie so lange um, bis man auf den einfachen Typ $x = a$ kommt. Bei diesem Umformen dürfen aber keine Lösungen hinzukommen und auch keine Lösungen verlorengehen. Umformungen, die dies leisten, bekommen einen besonderen Namen.

Definition 126.1: Zwei **Gleichungen** heißen **äquivalent**, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.
Eine Gleichungsumformung heißt **Äquivalenzumformung**, wenn die ursprüngliche Gleichung und die neue Gleichung äquivalent sind.

Unser Ziel ist es nun, Gleichungsumformungen aufzufinden, die als Äquivalenzumformungen zum Lösen von Gleichungen benützt werden können.

Aufgaben

Stelle bei den folgenden Gleichungen fest, ob sie äquivalent sind. Sind Gleichung I und Gleichung II äquivalent, dann kannst du kurz I $\Leftrightarrow$ II schreiben.

1. **a)** I. $x = 3$; II. $13x = 39$ **b)** I. $x + 1 = 2$; II. $x + 9 = 10$
   c) I. $x + 1 = 2$; II. $x + 10 = 9$ **d)** I. $x^2 = 1$; II. $x = 1$

2. **a)** I. $\frac{5}{3}x = \frac{3}{5}$; II. $x^2 = \frac{9}{25}$ **b)** I. $x = x$; II. $0 \cdot x = 0$
   c) I. $10\frac{3}{4} + x = 9\frac{7}{8} + x$; II. $\frac{x}{x} = 2$ **d)** I. $x - x = 0$; II. $1 = 1$

4.2.2.2 Äquivalenzumformung durch Termersetzung

Ersetzt man in einer Gleichung einen Term durch einen äquivalenten, so ändert sich die Lösungsmenge nicht, weil nach Definition 89.1 bei jeder Einsetzung der alte und der neue Term den gleichen Zahlenwert liefern.

Beispiele:

1) $2x + 5 - x = 1 - x - 8$
Vereinfacht man die Terme auf der linken und auf der rechten Seite der Gleichung, so erhält man die äquivalente Gleichung
$x + 5 = -7 - x.$

2) $3(x-5) = \dfrac{14+8x}{4}$

Unter Anwendung der Rechengesetze erhalten wir die äquivalente Gleichung

$3x - 15 = \frac{7}{2} + 2x.$

Durch Termersetzungen können wir die Gleichungen also vereinfachen. Zur vollständigen Lösung brauchen wir allerdings noch weitere Äquivalenzumformungen. Wir werden sie im folgenden kennenlernen. Weil es lästig ist, jedesmal durch einen Zwischentext zu versichern, daß man gerade eine Äquivalenzumformung durchgeführt hat, treffen wir die

Vereinbarung 127.1: Die durch Äquivalenzumformungen entstandene neue Gleichung schreiben wir ohne Kommentar unter die alte Gleichung. Zur Verdeutlichung kann man auch zwischen die äquivalenten Gleichungen das Äquivalenzzeichen $\Leftrightarrow$ setzen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} -2(3-5(x-1)+4)-8 &= \tfrac{7}{3}(x-(9-2x)) \\ -2(7-5x+5)-8 &= \tfrac{7}{3}(x-9+2x) \\ -2(12-5x)-8 &= \tfrac{7}{3}(3x-9) \\ -24+10x-8 &= 7x-21 \\ 10x-32 &= 7x-21\,. \end{aligned}$$

Der Übersichtlichkeit halber haben wir die äquivalenten Gleichungen im letzten Beispiel so geschrieben, daß die Gleichheitszeichen immer untereinander zu stehen kamen. Dadurch erkennt man gut, wie sich die linke Seite und wie sich die rechte Seite jeweils verändert haben. Gleichungen in dieser Form untereinanderzuschreiben geht natürlich nur, wenn man schon weiß, wieviel Platz die linke Seite in der neuen Zeile brauchen wird. Du wirst es im Heft nicht immer so einrichten können. Eins mußt du aber immer tun: Jede neue Gleichung muß in eine neue Zeile geschrieben werden. Auch bei einfachen Termumformungen darfst du nie in derselben Zeile mit einem $=$-Zeichen weiterschreiben, auch wenn es noch so bequem wäre.
Beachte: Bei Gleichungen gibt es in jeder Zeile nur *ein* Gleichheitszeichen!

Beispiel:

Schreibe **nicht** $x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,
sondern **richtig** mit **zwei** Gleichungen $\quad x = 1 + \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow\ x = \tfrac{3}{2}.$$

Aufgaben

1. Vereinfache die folgenden Gleichungen und gib die Lösungsmenge an.

a) $x + 0{,}5x = \frac{7}{2}x - 2x$

b) $\frac{3}{2} \cdot (5x - 2) = 1 - 4$

c) $\dfrac{-15x - 6}{3} + 1{,}5 = 3x - (3 : \frac{3}{8})x$

d) $x - 3(2\frac{1}{6} : 1\frac{6}{7}) = 0$

•**e)** $x(x - 2(x + 5)) = -10x - x^2$

••**f)** $3\frac{1}{2} \cdot [2 - x(1\frac{1}{2} + 2x) + x(0{,}5 + 2x)] = 7$

2. Die unbekannte Zahl muß nicht immer x heißen! Vereinfache die folgenden Gleichungen und gib die Lösungsmenge an.

a) $[(5 - 3 : 4) \cdot 6 - 22] \cdot y = 0$

b) $[(5 - 3 : 4) \cdot 8 - 34]z = 0$

c) $(0{,}25 - 0{,}35 \cdot \frac{5}{7}) \cdot u = 1{,}55 \cdot \frac{20}{31} - 2$

d) $y \cdot (9 : 4 \cdot 6 - 9 : 6 \cdot 4 - 4 : 6 \cdot 9 - 0{,}5) = 6 : 4 : 9$

e) $14\frac{1}{2}z - 8\frac{1}{3}z - 5\frac{1}{6}z = 5\frac{1}{6} - 8\frac{1}{3} - 14\frac{1}{2}$

3. Vereinfache und gib die Lösungsmenge an.

a) $[2{,}6 + (1\frac{1}{2} - 2\frac{4}{5}) \cdot 2]x = \frac{1}{2}[2 - \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) - 1{,}25]$

b) $[\frac{7}{3} \cdot 4\frac{1}{14} - (2{,}64 - 4{,}14)(-\frac{19}{3})]y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$

4.2.2.3 Äquivalenzumformung durch Addition von Termen

Bei der Gleichung $x - 3\frac{1}{2} = 7\frac{3}{4}$ sind beide Seiten schon so einfach wie möglich. Wir benötigen nun eine neue Äquivalenzumformung, die diese Gleichung auf die Form $x = a$ bringt. Dazu überlegen wir:
Wenn eine Gleichung eine Lösung besitzt, dann steht, wenn man sie sich eingesetzt denkt, links und rechts vom Gleichheitszeichen dieselbe Zahl. Addiert man nun auf beiden Seiten der Gleichung Gleiches, dann ergibt sich auf beiden Seiten die gleiche Summe. Um also zu erreichen, daß die unbekannte Zahl x alleine auf der linken Seite übrigbleibt – wir sagen kurz, wir wollen x **isolieren** –, müssen wir in unserem Beispiel auf beiden Seiten $3\frac{1}{2}$ addieren. Dieses Vorgehen deuten wir dadurch an, daß wir hinter die Gleichung zwei senkrechte Striche setzen und dahinter $+3\frac{1}{2}$ schreiben. Nun führen wir es vor:

$$\begin{aligned} x - 3\tfrac{1}{2} &= 7\tfrac{3}{4} \qquad \| + 3\tfrac{1}{2} \\ (x - 3\tfrac{1}{2}) + 3\tfrac{1}{2} &= 7\tfrac{3}{4} + 3\tfrac{1}{2} \\ x - 3\tfrac{1}{2} + 3\tfrac{1}{2} &= 11\tfrac{1}{4} \\ x &= 11\tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

Die gesuchte Zahl ist also $11\frac{1}{4}$.