Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

4.2.2.4 Äquivalenzumformung durch Multiplikation mit Termen

4.2.2.4 Äquivalenzumformung durch Multiplikation mit Termen

Bei der Gleichung $8x = 15$ sind beide Seiten schon so einfach wie möglich. Wir benötigen nun eine neue Äquivalenzumformung, die diese Gleichung auf die Form $x = a$ bringt. Dazu überlegen wir:
Wenn eine Gleichung eine Lösung besitzt, dann steht, wenn man diese sich eingesetzt denkt, rechts und links vom Gleichheitszeichen dieselbe Zahl. Multipliziert man nun beide Seiten der Gleichung mit dem gleichen Faktor, dann stellt sich auf beiden Seiten dasselbe Ergebnis ein. Um bei unserer Gleichung x zu isolieren, müssen wir also beide Seiten mit $\frac{1}{8}$ multiplizieren oder beide Seiten durch 8 dividieren.
Wir führen es vor:

$$8x = 15 \quad \| \cdot \tfrac{1}{8} \qquad \text{oder} \qquad 8x = 15 \quad \| : 8$$

$$(8x) \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{15}{8} \qquad\qquad \frac{8x}{8} = \frac{15}{8}$$

$$8x \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{15}{8} \qquad\qquad x = \tfrac{15}{8}$$

$$x = \tfrac{15}{8}$$

Die gesuchte Zahl ist also $\frac{15}{8}$.
Die obigen Überlegungen können wir verallgemeinern auf Terme, da Terme wie Zahlen behandelt werden. Es gilt

> **Satz 131.1:** Die Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit einem Term ist eine Äquivalenzumformung, falls der Term nicht null ist.
>
> Kurz: $$\mathbf{T_1 = T_2 \quad \| \cdot T \qquad (T \neq 0)}$$
> $$\mathbf{\Leftrightarrow T_1 \cdot T = T_2 \cdot T}$$

Zur **Begründung** überlegen wir uns:

1) Ist a eine Lösung der Gleichung $T_1 = T_2$, dann gilt
$T_1(a) = T_2(a)$, also auch
$T_1(a) \cdot T(a) = T_2(a) \cdot T(a)$.
Damit ist a auch eine Lösung der durch Termmultiplikation entstandenen Gleichung. Es gehen also bei der Umformung durch Termmultiplikation sicher keine Lösungen verloren.

2) Ist umgekehrt b eine Lösung der umgeformten Gleichung $T_1 \cdot T = T_2 \cdot T$, dann gilt
$T_1(b) \cdot T(b) = T_2(b) \cdot T(b)$.
Multipliziert man beide Seiten mit $\dfrac{1}{T(b)}$, was natürlich nur für $T(b) \neq 0$ möglich ist, dann erhält man
$T_1(b) = T_2(b)$.

Das heißt aber, daß b auch eine Lösung der Gleichung $T_1 = T_2$ ist. Es kann also bei der Umformung durch Termmultiplikation auch keine Lösung hinzugekommen sein, wenn $T(b) \neq 0$ gilt.
Da somit bei der Termmultiplikation weder Lösungen hinzugekommen sind noch verlorengegangen sind, stimmt die Lösungsmenge der Gleichung $T_1 = T_2$ mit der Lösungsmenge der Gleichung $T_1 \cdot T = T_2 \cdot T$ überein; die Umformung durch Multiplikation mit Termen $(\neq 0)$ ist also eine Äquivalenzumformung.

Zum Einüben zwei etwas anspruchsvollere Gleichungen.

Beispiel 1: $7\frac{1}{3}x = -5\frac{1}{2}$

Zum Rechnen verwandeln wir die gemischten Zahlen besser in gemeine Brüche:

$$\frac{22}{3}x = -\frac{11}{2}$$

Nun multiplizieren wir die Gleichung mit $\frac{3}{22}$, um x zu isolieren:

$$\frac{22}{3}x = -\frac{11}{2} \quad \| \cdot \frac{3}{22}$$

$$x = -\frac{11 \cdot 3}{2 \cdot 22}$$

$$x = -\frac{3}{4}.$$

Beispiel 2: $27{,}2 = -0{,}06x \quad \| : (-0{,}06)$

$$\frac{27{,}2}{-0{,}06} = x$$

Weil $a = b$ dasselbe bedeutet wie $b = a$, vertauschen wir der leichteren Lesbarkeit halber die beiden Seiten und vereinfachen weiter.

$$x = -\frac{2720}{6}$$

$$x = -\frac{1360}{3}.$$

Aufgaben

1. **a)** $2x = 5$ **b)** $\frac{1}{2}x = 3$ **c)** $\frac{2}{3}x = 9$

2. **a)** $5x = -2$ **b)** $2\frac{1}{2}x = -1$ **c)** $-3\frac{1}{2} = \frac{1}{4}x$

3. **a)** $-x = 7{,}1$ **b)** $(-2)x = 1$ **c)** $-0{,}1x = 0{,}01$

4. **a)** $-2{,}5x = 5\frac{5}{7}$ **b)** $3 - \frac{1}{5} = -\frac{5}{11}x$ **c)** $\frac{x}{27} = \frac{1}{18}$

5. **a)** $9 : 14 = \frac{x}{84}$ **b)** $-80 = x : 6$ **c)** $\frac{2x}{5} = 3 \cdot 2\frac{1}{6}$

6. **a)** $\frac{x}{7} = 4$ **b)** $-\frac{x}{2} = 7{,}8$ **c)** $-\frac{9}{8} = -\frac{8x}{9}$

7. **a)** $\frac{5}{6}x = -\frac{5}{4} + 1$ **b)** $x : 17{,}5 = 5{,}25 \cdot 0{,}01$ **c)** $\frac{x}{49{,}6} = 4{,}3 : 18{,}6$

8. **a)** $\frac{7}{9}(-x) = \frac{1}{-3}$ **b)** $(-x) : 1024 = \frac{17}{128}$ **c)** $\frac{-2{,}198}{-0{,}7} = -3{,}14(-x)$