



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

4.2.2.5 Mehrfache Äquivalenzumformungen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83493](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83493)

4.2.2.5 Mehrfache Äquivalenzumformungen

In den meisten Fällen wird man nicht mit einer der drei im letzten Abschnitt behandelten Äquivalenzumformungen allein auskommen. Fast immer braucht man alle drei! Betrachten wir etwa die Gleichung

$$97 + 2x - (19x - 15) + 3 = 107 - 7x - (11x - (5 + 3x)).$$

Zuerst vereinfachen wir beide Seiten durch Termersetzungen:

$$100 + 2x - 19x + 15 = 107 - 7x - (11x - 5 - 3x)$$

$$115 - 17x = 107 - 7x - (8x - 5)$$

$$115 - 17x = 107 - 7x - 8x + 5$$

$$115 - 17x = 112 - 15x.$$

Durch Addition von Termen sorgen wir jetzt dafür, daß alle x -Glieder auf der einen und alle von x freien Glieder auf der anderen Seite stehen. Der Bequemlichkeit halber achten wir darauf, daß der Faktor bei x positiv ist.

$$115 - 17x = 112 - 15x \quad || +17x - 112$$

$$3 = 2x.$$

Durch Vertauschen der Seiten erhalten wir die gewohnte Form

$$2x = 3.$$

Zum Abschluß isolieren wir x durch Multiplikation mit $\frac{1}{2}$.

$$2x = 3 \quad || \cdot \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}.$$

Die drei Äquivalenzumformungen reichen aus, um jede Gleichung, in der die Unbekannte nicht in zweiter oder gar in höherer Potenz vorkommt, zu lösen. Weil $x^1 = x$ gilt, sagt man auch: Die Unbekannte kommt in der Gleichung nur in der ersten Potenz vor. Für solche Gleichungen hat man einen eigenen Namen eingeführt.

Definition 133.1: Eine Gleichung, in der die Unbekannte nur in der ersten Potenz vorkommt, heißt **lineare Gleichung**.*

Den Weg zur Lösung einer linearen Gleichung fassen wir zusammen in

Regel 133.1: Eine lineare Gleichung löst man durch Äquivalenzumformungen in der folgenden Reihenfolge:

1. Vereinfachen
2. Addieren
3. Multiplizieren

* Zum ersten Mal 1694 belegt als *égalité linéaire* bei Jean PRESTET (1652–1690) in seinen *Nouveaux Éléments des Mathématiques ou Principes généraux de Toutes les Sciences, qui ont les grandeurs pour objet*.

Zur Einübung der Regel betrachten wir noch ein komplizierteres

Beispiel: $3\frac{3}{4}x - (1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x) = -3\frac{3}{4} + (1\frac{1}{2}x - (1\frac{1}{2} - x)) + 3\frac{3}{5}$
 $3\frac{3}{4}x - 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = -\frac{3}{20} + (1\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2} + x)$
 $3\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2} = -\frac{3}{20} + (2\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2})$
 $3\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2} = -\frac{3}{20} + 2\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$
 $3\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2} = -1\frac{13}{20} + 2\frac{1}{2}x \quad || -2\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$
 $\frac{3}{4}x = -\frac{3}{20} \quad || \cdot \frac{4}{3}$
 $x = -\frac{1}{5}$

Manchmal vereinfacht sich die Rechnung, wenn man als allerersten Schritt die Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert, um die Brüche zu beseitigen.

Beispiel:

$$\frac{5x + 12,5}{7} - \frac{5(0,4 - 2x)}{6} = \frac{9x - 0,7}{4} - \frac{7x - 1,1}{3} + 2 \quad || \cdot 84$$

$$12(5x + 12,5) - 14 \cdot 5 \cdot (0,4 - 2x) = 21(9x - 0,7) - 28(7x - 1,1) + 2 \cdot 84$$

$$60x + 150 - 28 + 140x = 189x - 14,7 - 196x + 30,8 + 168$$

$$200x + 122 = -7x + 184,1 \quad || +7x - 122$$

$$207x = 62,1 \quad || : 207$$

$$x = 0,3$$

Aufgaben

1. a) $8 + 6x = 20$ b) $-3 + 5x = 17$ c) $4x - 12 = 44$
2. a) $1 = 13 - 6x$ b) $10 = 24 - 7x$ c) $-9x - 144 = -36$
3. a) $19 - x = 100 - 10x$ b) $3x + 1 = 5x - 3$ c) $19 - 2x = 8x - 16$
4. a) $4x + 15 - x = 54$ b) $5x + 2 + x = 26$ c) $-x + 8 - 3x = 0$
5. a) $17 = 17 - 12x + 3x$ b) $31 + x = 111 - 7x$ c) $21 + 8x = 30 + 5x$
6. a) $11x - 41 = 10x - 31$ b) $5x - 5 = 15 + 3x$ c) $4x - 16 = 19 - 3x$
7. a) $8x + 22 - x = 100 - 11x - 42$
 b) $9x = 7x + 16 + 5x + 7 - 10x$
 c) $19 + 3x - 23 = 10 + 2x - 34$
8. a) $29x + 39 - 34x = 49 - 20x - 10$
 b) $4x + 4 - 7x = -8x + 2 + 5x - 4$
9. a) $8x - 17 + x = 9x - 13 - 4$
 b) $9x - 16 = 10x - 9 - 4x + 5$
10. a) $0 = 14 - 8x + x - 3x + x + 4$
 b) $9x + 34 - 6x - 33 + 2x = 9$

11. a) $11x = 8x + 15 + 6x + 6 - 10x$
 b) $27x - 9 - 17x + 10 = 45 + 5x - 4$
12. a) $7x - 6 + 5x - 4 + 3x - 2 + x - 4 = 0$
 b) $18 = 93 - 6x - 11 - 4x - 5 - 2x + 1$
13. a) $12x - 10 + 8x - 6 + 4x - 8 = 0$
 b) $6x - 13 + x - 1 + 12x - 15 - 10x + 2 = 0$
14. a) $19x = 5x + 2 + 5x + 3 + 7x + 3 + 6$
 b) $36 + 12x - 19 - x + 10 - 8x = 0$
15. a) $21x - 21 - 7x + 7 = 7x + 21 + 14x - 7 - 19x + 26x$
 b) $121x + 49 - 234x + 3 - x = x - 56 - 115x + 108$
16. a) $\frac{x}{4} - \frac{x}{3} + \frac{x}{8} - \frac{x}{6} + \frac{x}{2} + \frac{x}{12} = 11$ b) $\frac{7}{3}x + \frac{7}{6} - \frac{7}{2}x + \frac{1}{5} = 3 - \frac{14}{5}x$
17. a) $(-0,7)^3 + 5,94x - 9,02 + 2,63x + 11,31 = 6,24x - 6,263 - 1,11$
 b) $0 = 12,9x - 1,45x - 3,29 - 0,99x - 11x + 0,32$
18. a) $2x - \frac{2}{3}x - \frac{3}{5}x = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{2}{5}x + 2 - \frac{2}{3}x$
 b) $-0,5x + 9 = \frac{3}{2}x + 4 - \frac{6}{5}x + 0,2$
19. a) $5x - 9 = 3x + 7$ b) $2x + 11 = 8x - 10$
20. a) $126 + 7x = \frac{1}{5}x - 44$ b) $7,5 - 2,4x = 3,1x - 9$
21. a) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x = 2 + \frac{1}{4}x$ b) $\frac{1}{7}x + \frac{1}{3}x - 13 = \frac{1}{6}x$
22. a) $\frac{4}{5}x + 18 = \frac{1}{3}x + 0,2x + 2$ b) $1,5x - 8,5 = \frac{19}{24}x$
23. a) $\frac{0,64}{3}x + 0,5x - 0,43 = x$ b) $\frac{2,75}{9}x - \frac{x}{0,72} + x + 6 = 0$
24. a) $\frac{2x+5}{3} = x + 4$ b) $\frac{8+12x}{19} = \frac{6x-7}{4}$
25. a) $\frac{3x-6}{5} - \frac{1-15x}{2} = 1$ b) $\frac{13x+8}{6} - \frac{1}{3} = \frac{3}{5} + \frac{6-11x}{15}$
26. a) $\frac{5x}{36} + \frac{1}{3} = 0$ b) $\frac{3x-7}{5} = 4$
 c) $5 = \frac{28+0,7x}{7} + 0,85$ d) $3 + \frac{8-11x}{6} = \frac{2}{3}$
27. a) $4(2x-3) = 2(3x-4)$ b) $(25+3x) \cdot 7 = (7+25x) \cdot 3$
28. a) $13 - 3(5-x) = 7(x+1) - 13$
 b) $5(2x-300) - (150-x) \cdot 2 = 3x$

29. a) $3(1,8 + 3x) - 26 = 9 - 5(1,5x - 2)$
 b) $0,75(7x - 16) - 0,25(9x - 60) + 1 = 0$
 c) $5\left(\frac{x}{3} - 26\right) - 3\left(\frac{x}{4} + 3\right) = \frac{x}{2} - 14$
 d) $\frac{1}{7}\left(1 - \frac{2}{3}x\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}(2 - x)$
30. a) $3x + (9 - x) = 13$ b) $5x - (1 + 2x) = 11$
 c) $-(8 - x) + 2x = 10$
31. a) $9x - 2 - (7 - 2x) = 13$ b) $x - (2x - (3x - 1)) = 101$
 c) $12x = -12 - (-12x - 12)$ d) $5x - (3 - 4x) = 3^2 \cdot (x + 4)$
32. a) $9 - (5x + 2) + (10 + 8x) - (3x - 18) = x + 20$
 b) $93 + 2x - (19x - 15) = 100 - 7x - (11x - (5 + 2x))$
33. a) $(25 + 12x) - (10x - 11) = (12 + 6x) - ((12x + 13) - (10x - 11))$
 b) $-2x - (4 + (2x - 3)) = (30 - 18x) - (2x - (3x - 5))$
34. a) $5(5 + 2x) = 9 + 4x$ b) $0 = 4(10 - 2x) - 3(x - 5)$
 c) $3(9 - x) = 5(x - 9)$ d) $2^3(x - 3^2) = 3^2(x + 2^3)$
35. a) $1(4x - 3) + 3(9 - 18x) = 10(1 - 3x)$
 b) $7(3x - 7) + 5(x - 3) + 4(17 - x) = 103 - 11x$
36. a) $13x - 7(11 - x) + 11 = 4x - 3(20 - x) + 7x$
 b) $8(2x - 3) - 5(2x - 8) = 32 - 4(1 - 3x) + 8x$
37. a) $3\frac{1}{3}x - 4\frac{1}{4} = 5\frac{1}{5}x - 6\frac{1}{6}$ b) $0,1x - 0,2 = 0,3x - 0,4$
38. a) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x - \frac{3}{7} = -\frac{38}{7}$ b) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}x$
39. a) $10x = 7\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{5}x + 1 + 5x$
 b) $x = \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x - \frac{3}{5}x + \frac{5}{6}$
40. a) $\frac{4x}{3} - \frac{3x}{2} + \frac{4x}{5} + \frac{1}{6} = \frac{9}{5} - x$
 b) $-37\frac{13}{30} = \frac{x}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x}{6} - 1\frac{5}{12}x + 2\frac{4}{5} - 3\frac{9}{10}x + 98$
41. a) $47x - 43 = 73 + 41,5x + 7,2x + 16,6$
 b) $0 = 1,45x - 2,7x - 0,6x + 0,5x - 7,8 - 1,2$
42. a) $18x - 7,52 - 2,35x = 5,381 - 2,9x - 0,58 + 13x$
 b) $1,45x + 3,29 = 12,9x - 0,99x - 11x + 0,32$
43. a) $\frac{2}{3}(x - 5) - x = 1 + \frac{2}{3}(11 - 2x)$
 b) $\frac{1}{4}(3x - 16) = 2x - 3(5 + \frac{3}{4}x) + \frac{2}{3}(4 - x)$

44. a) $3x(x+7) - x(3x+7) + 70 = 0$

b) $4x(6-3x) + 6x(2x+1) = 15$

45. $(\frac{3}{7}x - \frac{7}{3}) \cdot 21x - (33x+5) \cdot \frac{3}{11}x = 277$

46. $0,32x(1,25x-10) + (6,3-0,8x) \cdot 0,5x + 1 = 0$

47. a) $x - (x - (x - (x - 1) - 1) - 1) = 0$

b) $1 - 2(x - 3(x - 4(x - 5))) = 11(11 - 2x) + 2x$

48. a) $6x - \frac{x-3}{2} = 5x + \frac{3+x}{2}$ b) $\frac{-x+3}{2} + 6x = \frac{x-3}{2} + 5x$

Die Aufgaben 49 bis 51 sollen den Einfluß von Rundungen zeigen.

49. a) $3,14x - 6,28 = -9,577$

b) $3,14x - 6,28 = -9,58$

c) $3,1x - 6,3 = -9,6$

d) $3x - 6 = -10$

50. a) $-1,27x + 9,51 = 9,88 - 1,22x$ b) $-1,3x + 9,5 = 9,9 - 1,2x$

c) $-x + 10 = 10 - x$

51. a) $3,14x - 7,28 = -8,193$ b) $3,1x - 7,3 = -8,2$ c) $3x - 7 = -8$

52. $25\left(\frac{2}{15}x + \frac{1}{3}\right) - x + 2\left(\frac{x}{6} - 15\right) - 36x = 0$

53. $x + 2[x + 3(x + 4)] = 15$

54. $\left[\left(x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right] \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{x}{2}$

55. $1 - 5(4x - 11) = 5[3x - 7(2x - 1)]$

56. $1,5(3 - 5x) - [4(2,8 + 0,3x) - 10] + 9x = 0$

• 57. $1 - (2 + 3 \cdot [(3x - 8) - 2(8 - 3x)]) = 5(1 - 2x) - 2$

• 58. $\left(\left[(x+1) \cdot 2 + \frac{1}{2}\right] \cdot 3 + \frac{1}{3}\right) \cdot 4 + \frac{1}{4} = \left(\left[(x+1) \cdot 2 + \frac{x}{2}\right] \cdot 3 + \frac{x}{3}\right) \cdot 4 + \frac{x}{4}$

59. $5 \cdot \frac{x-2}{9} - (2x-18) \cdot 3 = \frac{7}{3} \cdot \frac{9x+10}{5}$

• 60. $\frac{3}{2} \cdot \frac{3x+5}{6} - \frac{2(2x-3)-24}{5} = 1\frac{1}{4} - \frac{(x-270) \cdot \frac{1}{5}}{9}$

• 61. $\frac{\frac{4}{5}(x+4)}{6} - 3\left(\frac{3x-1}{4} - x\right) = 2x - 11$

• 62. $\frac{7\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)}{16} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4x+2,5}{8} - 3\left(1 - \frac{x}{64}\right) + \frac{17}{32} \cdot (x-2) = \frac{1}{192}$