Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

4.2.3 Produkte mit dem Wert null

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

4.2.3 Produkte mit dem Wert null

Wir erinnern an die Tatsache, daß die Null als Faktor jedes Produkt zu null macht*, und halten dies fest in

> **Satz 139.1:** Wenn in einem Produkt mindestens ein Faktor null ist, dann hat das Produkt den Wert null.

Beispiele:

1) $3 \cdot 0 = 0$ **2)** $0 \cdot (-7) = 0$

3) $\frac{1}{2} \cdot 2^{10} \cdot 0 \cdot 8 = 0$ **4)** $-3 \cdot 0 \cdot (a^2 - a) \cdot 0 \cdot 5 = 0$

Wissen wir umgekehrt von einem Produkt, daß es den Wert null hat, dann muß mindestens einer der Faktoren null sein; denn wären alle Faktoren von null verschieden, dann wäre nach den Vorzeichenregeln auch das Produkt von null verschieden.
Es gilt also

> **Satz 139.2:** Wenn ein Produkt den Wert null hat, dann ist mindestens einer der Faktoren null.

Als Anwendung dieses Satzes bestimmen wir die Lösungsmenge der Gleichung

$(x-1)(x-2) = 0$.

Das links stehende Produkt besteht aus den Faktoren $x-1$ und $x-2$; mindestens einer davon muß null sein. Es gilt also $x-1=0$ oder $x-2=0$, d.h., $x=1$ oder $x=2$.

Beide Faktoren können nicht zugleich null werden, weil x nicht zwei verschiedene Werte gleichzeitig annehmen kann.
Die Information, die uns die Gleichung $(x-1)(x-2)=0$ liefert, ist also mehrdeutig. Sie ist äquivalent mit der Information »$x = 1$ oder $x = 2$«. Solche mit *oder* zusammengesetzte Aussageformen kommen in der Mathematik häufig vor, so daß es sich lohnt, für das Wort »oder« in diesem Zusammenhang eine symbolische Abkürzung einzuführen. Für *oder* schreibt man kurz $\vee$. Das $\vee$ soll an das lateinische Wort für *oder*, nämlich *vel*, erinnern.
Eine Zahl ist Lösung einer *Oder*-Aussageform, wenn beim Einsetzen eine wahre Oder-Aussage entsteht. Eine **Oder-Aussage** in der Mathematik ist eine Verknüpfung zweier Teilaussagen durch das Wort oder bzw. durch $\vee$.

Eine Oder-Aussage ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der Teilaussa-

* Beachte die Groß- und Kleinschreibung: Die Zahl Null hat den Wert null. Bei der Zahl 10 sagt die Ziffer Null, daß die Zehn null Einer hat.

gen wahr ist, d.h., wenn die erste Teilaussage wahr ist oder wenn die zweite wahr ist oder wenn beide zugleich wahr sind. Die Lösungsmenge einer Oder-Aussageform ist also die Vereinigungsmenge der Lösungsmengen der Teilaussageformen. Das Zeichen $\cup$ erinnert an $\vee$. Unsere Oder-Aussageform $x = 1 \vee x = 2$ besitzt demnach die Lösungsmenge $L = \{1; 2\}$.

** Zur Geschichte der Null

In einem Zeichenwertsystem, wie es die Ägypter, die Griechen und die Römer verwendeten, brauchte man keine Null; denn 10 schrieb man römisch eben als X und 101 als CI. Interessanterweise findet man aber um 100 v. Chr. bei den Ägyptern ein Zeichen für den Wert null, die abwehrenden Hände (Abbildung 140.1). Bei einem Stellenwertsystem ist aber ein Zeichen für die nicht besetzte Stelle nötig; denn 11 ist etwas anderes als 101. Beim babylonischen Stellenwertsystem, dem 60er- oder Sexagesimalsystem, taucht bereits um 2000 v. Chr. ein solches Lückenzeichen auf, wird aber erst ab 200 v. Chr. systematisch verwendet. (Abbildung 140.2)
Die Inder besaßen spätestens seit den ersten Jahrhunderten n. Chr. ein Stellenwertsystem, das praktischste, das jemals erfunden worden war und das wir heute noch benützen. Zu ihren neun Zahlzeichen für eins, zwei, ..., neun kommt im 7. Jh. ein Zeichen für die Lücke, die sie *sunya = die Leere* genannt hatten, hinzu; es ist ein Punkt oder auch ein kleiner Kreis.
Woher hatten nun die Inder dieses Zeichen? Darüber streiten bis heute die Gelehrten. Die einen meinen, die Inder hätten es selbst erfunden. Nun stammt die früheste erhaltene indische Null als Kreisring von einer Tempelinschrift bei Gwalior aus dem Jahre 870. Daher meinen andere Gelehrte, die Inder könnten den Punkt und den Kreis für die Null von den Chinesen übernommen haben; denn in einem chinesischen astronomischen Text aus der Zeit von zwischen 718 und 729 ist uns ein Punkt für die Null überliefert. Noch früher, und vielleicht von China beeinflußt, sind Inschriften aus Kambodscha und von der indonesischen Insel Bangka mit den Jahreszahlen 605 bzw. 608 (Abbildung 140.3). Haben die Inder über ihre Kaufleute von dort die Idee bezogen? Oder stammt sie gar von den Griechen?
Der größte Astronom des Altertums, Klaudios PTOLEMAIOS (um 100–160) benötigte ein Zeichen, um anzudeuten, daß ein Winkel null Grad, null Minuten und nur 14 Winkelsekunden mißt. Er

Abb. 140.1 Ägyptisches Zeichen für null an einem Tempel in Edfu (2./1. Jh. v. Chr.)

Abb. 140.2
Der Doppelhaken, das babylonische Lückenzeichen: $2 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 15 = 7215$

Abb. 140.3
Die Schakajahrzeichen 605 (= 683/4 n. Chr.) und 608 (= 686/7 n. Chr.) Der südindische Schakakalender beginnt seine Zeitzählung am 15. März 78 n. Chr.

Abb. 140.4
Die Mayazahl $820 = 8 \cdot (20 \cdot 18) + 2 \cdot 20 + 0 = 2920$ indisch

schrieb dann $\bar{o}\bar{o}\ \overline{\alpha\delta}$. Dabei soll das o eine Abkürzung von οὐδέν (udén) = *nichts* sein. So legt es uns die aus dem 9. Jh. stammende älteste erhaltene Handschrift seiner Μαθηματικὴ σύνταξις (Mathematiké sýntaxis) = *Mathematische Zusammenstellung* des astronomischen Wissens seiner Zeit nahe. Die indischen Astronomen der darauf folgenden Jahrhunderte lernten aber von den Griechen. Und da sich gerade in der Zeit zwischen 200 und 600 n. Chr. das indische Stellenwertsystem entwickelte, was liegt da näher, als anzunehmen, daß sie das o des PTOLEMAIOS als Ziffer für ihre Lücke nahmen und sie auch *Leere* nannten?
Im Jahre 773 brachte ein Inder ein in Sanskrit geschriebenes astronomisches Werk nach Bagdad an den Hof des Kalifen AL-MANSUR (regierte 754–775). Es wurde ins Arabische übersetzt. So wurden die Araber mit den indischen Ziffern bekannt, die wir heute die arabischen nennen. AL-CHARIZMI überarbeitete später diese Übersetzung in seinen *Astronomischen Tafeln*. Zur Verbreitung der indischen Ziffern und der Kunst des Rechnens mit ihnen trug AL-CHARIZMI wesentlich durch ein Buch bei, das nur mehr bruchstückhaft in einer lateinischen Übersetzung unter dem Titel *Algoritmi de numero indorum* – »Buch des AL-CHARIZMI über die Zahlenschreibweise der Inder« – erhalten ist. *Sunya* übersetzten die Araber mit *al-sifr*, ihrem Wort für *Leere*. *Al-sifr* wurde latinisiert zu *cifra*, womit sogar noch 1799 Carl Friedrich GAUSS (1777–1855) die Null bezeichnete. Im Deutschen entstand aus *cifra* das Wort *Ziffer*, das im 15. Jh. allmählich die heutige Bedeutung von Zahlzeichen erlangte. Im Lateinischen hieß Zahlzeichen aber *figura*, der kleine Kreis für die durch kein Zahlzeichen besetzte Stelle *figura nihili* = *Zeichen für das Nichts* oder auch *nulla figura* = *kein Zahlzeichen*. Daraus entstand im Deutschen zunächst *Nulla*, dann *eine Nulle*, so z. B. 1716 belegt im *Mathematischen Lexicon* des Christian v. WOLFF (1679–1754), der in der 2. Auflage 1734 bereits die Kurzform *Null* als Stichwort aufführt.* Unabhängig von der Alten Welt haben in der Neuen Welt die Maya vielleicht schon um 500 n. Chr., also noch vor allen anderen Völkern, ein vollwertiges Stellenwertsystem mit der Null als Ziffer gekannt (Abbildung 140.4).

Aufgaben

1. **a)** $145x = 0$ **b)** $x \cdot (17^2 - 6^3) = 0$
c) $\frac{7}{9} \cdot y \cdot \frac{3}{14} = 0$ **d)** $(29 - 377 : 13) \cdot 3z = 0$
e) $16 + \frac{2}{5}x = 2\frac{1}{2} \cdot 6\frac{2}{5}$ **f)** $1{,}97x \cdot 4 = 23{,}5 + 15\frac{2}{3} : (-\frac{2}{3})$

2. Bestimme die Lösungsmenge.
a) $(x+1)(x-2) = 0$ **b)** $(x - \frac{2}{3})(x + \frac{1}{4}) = 0$
c) $(6x-3)(2x-1) = 0$ **d)** $(\frac{2}{5}x - 15)(1\frac{2}{3} - 2x) = 0$
e) $14(3x-8)(65+13x) = 0$ **f)** $(2\frac{5}{6}x - 34) \cdot 7^2 \cdot (1{,}5 - 2{,}5x) = 0$

3. **a)** $(x+1)^2 = 0$ **b)** $3 \cdot (2x-5)^2 = 0$
c) $2{,}35 \cdot (x-2)^3 = 0$ **d)** $(x+9)(x-9)^2 = 0$

•4. **a)** $(2x+1)(3x+2)(4x+3) = 0$ **b)** $(5x-9)(11+2x)(7x-49) = 0$
c) $89^2(16-5x)(x-1)^2 = 0$
d) $[(1{,}75x - 5{,}25)(x+19)] \cdot 5(2-x) = 0$

* Aus dem lateinischen *cifra* wurde im 15. Jh. das französische *chiffre* und schließlich das englische *cipher*, die beide neben *Null* und *Ziffer* auch noch *Geheimzahl* bedeuten. In dieser Bedeutung entstand im 17. Jh. das deutsche Fremdwort *Chiffre*. Bei LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240) wird aus *al-sifr* 1202 *zephirum*, woraus das französische *zéro*, das italienische *zero* und ddas englische *zero* wurden.

•**5.** Gib eine möglichst einfache Gleichung an, die die folgenden Zahlen als Lösung besitzt

a) 2 und 3	**b)** 2 und -3	**c)** -2 und 3
d) -2 und -3	**e)** $\frac{3}{2}$ und $-\frac{1}{4}$	**f)** 0 und -1
g) 0 und 1 und -1	**h)** 2 und -2 (zwei Möglichkeiten!)	

6. Entscheide, welche der folgenden Oder-Aussagen wahr sind.

a) Hannibal war ein Römer oder Alexander der Große war ein Römer.
b) Eine Spinne hat 6 oder 8 Beine.
c) Die Hauptstadt der Türkei ist Istanbul oder Izmir.
d) $2 = 3 \vee 2 < 3$
e) $2 = 3 \vee 2 > 3$
f) $2 < 3 \vee 2 > 3$
g) $2 < 3 \vee 2 = 3 \vee 2 > 3$
h) 2 teilt 11 oder 2 teilt 12.
i) 2 teilt 17^{17} oder 2 teilt $17^{17} + 1$.