Algebra

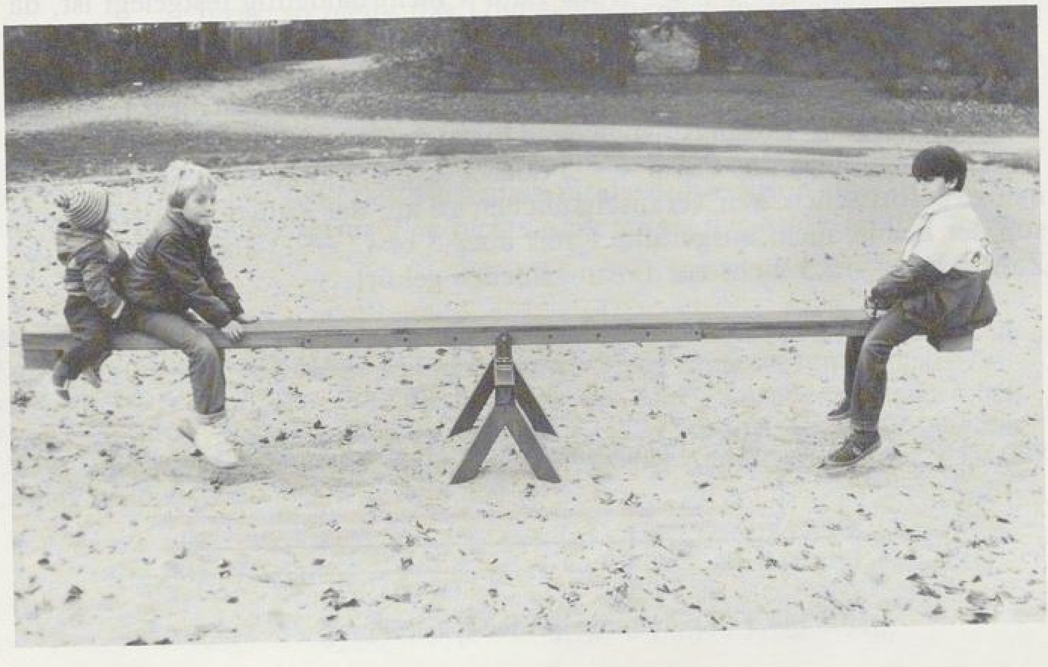
Barth, Friedrich

München, 1996

5 Ungleichungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

5 Ungleichungen



5 Ungleichungen

5.1 Was ist eine Ungleichung?

Wir erinnern daran, daß $a < b$ anschaulich bedeutet, daß die Zahl a auf der Zahlengeraden links von der Zahl b liegt. Rechnerisch bedeutet $a < b$: Es gibt eine positive Zahl p, so daß $a + p = b$ gilt. Abbildung 144.1 veranschaulicht dies.

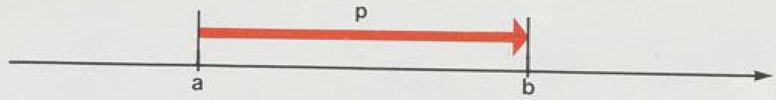


Abb. 144.1 $a < b \Leftrightarrow$ Es gibt ein $p > 0$, so daß $a + p = b$.

Was aber bedeutet eine Ungleichung, die eine Variable enthält?
Betrachten wir z. B. die Ungleichung

$$2x - 3 < 1 - x.$$

Wie bei einer Gleichung haben wir eine Information über eine unbekannte Zahl x vor uns. Diese Information ist in der vorliegenden Form noch sehr undurchsichtig. Durch Probieren kann man womöglich Zahlen finden, die der Information entsprechen. Nehmen wir z. B. für x die Zahlen 0, 2 oder -2, so erhalten wir der Reihe nach die Zahlen-Ungleichungen

$$-3 < 1 \qquad 1 < -1 \qquad -7 < 3.$$

Die erste und die dritte sind richtig, die mittlere falsch. Wir sehen, daß durch die Information $2x - 3 < 1 - x$ die Zahl x nicht eindeutig festgelegt ist, da bereits die beiden Zahlen 0 und -2 der Ungleichung genügen. Wie bei Gleichungen möchten wir aber alle Zahlen kennen, die der Information genügen. Betrachtet man die Ungleichung als Aussageform, dann bilden diese Lösungszahlen gerade die Lösungsmenge der Ungleichung.
Bei Ungleichungen der Form $x < 5$ oder $x > -2{,}3$ kann man die Lösungsmenge sofort sehen. Wir veranschaulichen sie auf der Zahlengeraden. Dabei soll der kleine, nicht ausgefüllte Kreis über 5 bzw. $-2{,}3$ andeuten, daß die Zahl 5 bzw. $-2{,}3$ nicht zur Lösungsmenge gehört.

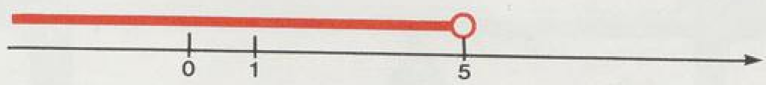


Abb. 144.2 Lösungsmenge der Ungleichung $x < 5$

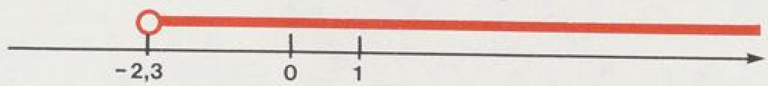


Abb. 144.3 Lösungsmenge der Ungleichung $x > -2{,}3$

Unser Ziel ist es, Ungleichungen so lange umzuformen, bis man auf solche einfache Ungleichungen stößt. Das ist immer dann erreicht, wenn man die Unbekannte auf einer Seite der Ungleichung isoliert hat. Dabei dürfen aber weder Lösungen hinzukommen noch verlorengehen. Wie bei Gleichungen legt man daher fest:

Definition 145.1: Zwei Ungleichungen heißen äquivalent, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.
Eine Ungleichungsumformung heißt Äquivalenzumformung, wenn die ursprüngliche Ungleichung und die umgeformte Ungleichung äquivalent sind.

5.2 Äquivalenzumformungen von Ungleichungen

Ersetzt man in einer Ungleichung einen Term durch einen äquivalenten, so ändert sich die Lösungsmenge nicht, weil bei jeder Einsetzung der alte und der neue Term den gleichen Zahlenwert liefern.

Beispiel: $3x - 5 + x < 7x - (13 - 19)$
$$4x - 5 < 7x + 6$$

Für die Addition von Termen gilt

Satz 145.1: Monotoniegesetz der Addition
Addiert man auf beiden Seiten einer Ungleichung einen Term, so bleibt das Ungleichheitszeichen erhalten; kurz

$$\begin{aligned} T_1 &< T_2 \quad \| + T \\ \Leftrightarrow T_1 + T &< T_2 + T \end{aligned}$$

Bemerkung: Satz 145.1 gilt natürlich auch für die Subtraktion eines Terms, da die Subtraktion eines Terms T ja nichts anderes als die Addition des Terms $-T$ ist.

Beweis: Ist a ein Element der Lösungsmenge der Ungleichung $T_1 < T_2$, dann gilt $T_1(a) < T_2(a)$. Auf Grund des Monotoniegesetzes der Addition für rationale Zahlen (Satz 62.1) kann man auf beiden Seiten die Zahl $T(a)$ addieren und erhält $T_1(a) + T(a) < T_2(a) + T(a)$. (Siehe Abbildung 145.1) Also ist a auch Lösung der Ungleichung $T_1 + T < T_2 + T$. Wir haben somit bei der Addition des Terms T keine Lösung verloren.

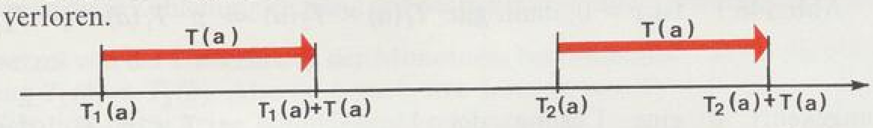


Abb. 145.1 $T_1(a) < T_2(a) \Leftrightarrow T_1(a) + T(a) < T_2(a) + T(a)$

Ist umgekehrt b eine Lösung der Ungleichung $T_1 + T < T_2 + T$, dann gilt $T_1(b) + T(b) < T_2(b) + T(b)$. Addiert man hier auf beiden Seiten die Zahl $-T(b)$, so erhält man nach dem Monotoniegesetz der Addition für rationale Zahlen die Zahlenungleichung $T_1(b) < T_2(b)$. Also ist b auch eine Lösung der Ungleichung $T_1 < T_2$. Somit kann durch die Addition des Terms T keine Lösung hinzugekommen sein. Die Ungleichungen $T_1 < T_2$ und $T_1 + T < T_2 + T$ sind also äquivalent.

Beispiel: $4x - 5 < 7x + 6 \quad \| -4x - 6$

$$-11 < 3x$$

Bei der Multiplikation von Ungleichungen mit Zahlen muß man aufpassen, da es zwei Monotoniegesetze gibt, eines für positive Multiplikatoren und eines für negative Multiplikatoren. Du kennst sie für rationale Zahlen bereits als Satz 81.1 und Satz 81.2.
Deshalb müssen wir auch bei den Äquivalenzumformungen von Ungleichungen mit Variablen zwei Monotoniegesetze unterscheiden.

Satz 146.1: Monotoniegesetz der Multiplikation
Multipliziert man eine Ungleichung mit einer *positiven* Zahl, so bleibt das Ungleichheitszeichen erhalten, kurz

$$\mathbf{T_1 < T_2 \quad \| \cdot p, \quad \text{wobei} \quad p > 0}$$
$$\mathbf{\Leftrightarrow p \cdot T_1 < p \cdot T_2}$$

Bemerkung: Satz 146.1 gilt natürlich auch für die Division durch eine positive Zahl, da die Division durch p ja nichts anderes ist als die Multiplikation mit $\frac{1}{p}$.

Beweis: Ist a ein Element der Lösungsmenge der Ungleichung $T_1 < T_2$, dann gilt $T_1(a) < T_2(a)$. Auf Grund des Monotoniegesetzes der Multiplikation für rationale Zahlen (Satz 81.1) kann man beide Seiten mit der positiven Zahl p multiplizieren und erhält $p \cdot T_1(a) < p \cdot T_2(a)$. (Siehe Abbildung 146.1) Also ist a auch Lösung der Ungleichung $p \cdot T_1 < p \cdot T_2$. Bei der Multiplikation mit p ist keine Lösung verlorengegangen!

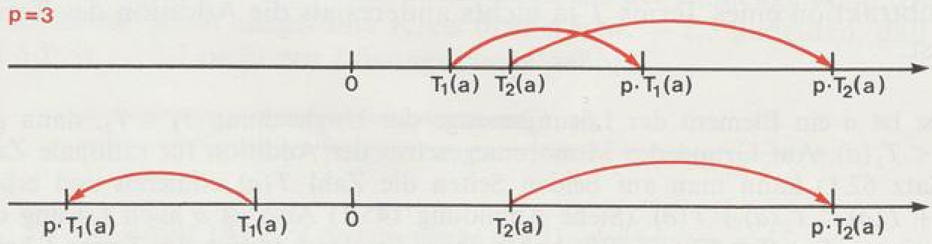


Abb. 146.1 Ist $p > 0$, dann gilt: $T_1(a) < T_2(a) \Leftrightarrow p \cdot T_1(a) < p \cdot T_2(a)$.

Ist umgekehrt b eine Lösung der Ungleichung $p \cdot T_1 < p \cdot T_2$, dann gilt $p \cdot T_1(b) < p \cdot T_2(b)$. Multipliziert man diese Zahlenungleichung mit der positiven

Zahl $\frac{1}{p}$, dann gilt nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation für rationale Zahlen die Zahlenungleichung $T_1(b) < T_2(b)$. Also ist b auch eine Lösung von $T_1 < T_2$. Bei der Multiplikation mit p ist keine Lösung hinzugekommen!
Die Ungleichungen $T_1 < T_2$ und $p \cdot T_1 < p \cdot T_2$ mit positivem p sind daher äquivalent.

Beispiel: $-11 < 3x \quad \| \cdot \frac{1}{3}$

$$-\tfrac{11}{3} < x$$

Damit haben wir durch drei Äquivalenzumformungen die eingangs gegebene Ungleichung $3x - 5 + x < 7x - (13 - 19)$ schließlich auf die äquivalente Form $-\frac{11}{3} < x$ gebracht, bei der wir die Lösungsmenge sofort erkennen können; Abbildung 147.1 zeigt sie.

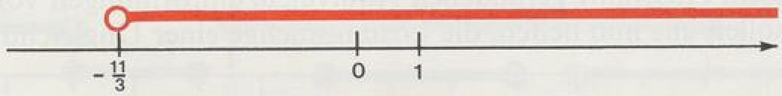


Abb. 147.1 Die Lösungsmenge der Ungleichung $3x - 5 + x < 7x - (13 - 19)$

Nun zum zweiten Monotoniegesetz der Multiplikation!

Satz 147.1: Gesetz von der Umkehrung der Monotonie
Multipliziert man eine Ungleichung mit einer *negativen* Zahl, so wird aus dem Kleiner-Zeichen ein Größer-Zeichen bzw. aus dem Größer-Zeichen ein Kleiner-Zeichen; man sagt dafür auch, das Ungleichheitszeichen kehrt sich um. Kurz

$$T_1 < T_2 \quad \| \cdot q, \quad \text{wobei} \quad q < 0$$
$$\Leftrightarrow q \cdot T_1 > q \cdot T_2$$

Bemerkung: Satz 147.1 gilt natürlich auch für die Division durch eine negative Zahl.

Beweis: Ist a ein Element der Lösungsmenge der Ungleichung $T_1 < T_2$, dann gilt $T_1(a) < T_2(a)$. Auf Grund des Gesetzes von der Umkehrung der Monotonie bei rationalen Zahlen (Satz 81.2) erhält man daraus bei Multiplikation mit einem negativen q die Zahlenungleichung $q \cdot T_1(a) > q \cdot T_2(a)$. (Siehe Abbildung 148.1) Also ist a auch Lösung der Ungleichung $q \cdot T_1 > q \cdot T_2$. Keine Lösung ist verlorengegangen!
Ist umgekehrt b eine Lösung von $q \cdot T_1 > q \cdot T_2$, dann gilt $q \cdot T_1(b) > q \cdot T_2(b)$. Multipliziert man diese Zahlenungleichung mit der negativen Zahl $\frac{1}{q}$, dann erhält man wegen des Gesetzes von der Umkehrung der Monotonie bei rationalen Zahlen die Zahlenungleichung $T_1(b) < T_2(b)$. Also ist b auch eine Lösung von $T_1 < T_2$. Somit ist bei der Multiplikation mit q keine Lösung hinzugekommen!
Die Ungleichungen $T_1 < T_2$ und $q \cdot T_1 > q \cdot T_2$ mit negativem q sind somit äquivalent.

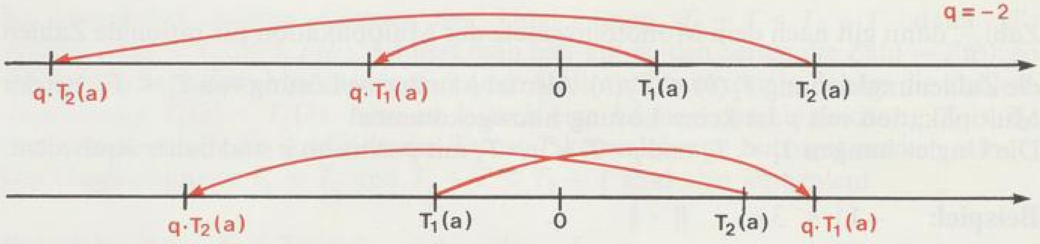


Abb. 148.1 Ist $q < 0$, dann gilt: $T_1(a) < T_2(a) \Leftrightarrow q \cdot T_1(a) > q \cdot T_2(a)$.

Beispiel: $-\frac{2}{3}x < -6 \quad \| \cdot (-\frac{3}{2})$

$x > 9$

Die in diesem Abschnitt gefundenen Äquivalenzumformungen von Ungleichungen sollen uns nun helfen, die Lösungsmenge einer Ungleichung zu bestimmen.

5.3 Lösen von Ungleichungen

5.3.1 Intervalle

Die Lösungsmengen von Ungleichungen enthalten meistens unendlich viele Lösungen, denen auf der Zahlengeraden Strecken oder Halbgeraden entsprechen. Diese Zahlenmengen nennen wir Intervalle*. Für Intervalle gibt es in der Mathematik Kurzbezeichnungen:

Definition 148.1:

Beschreibung des Intervalls	Intervall-symbol	Art des Intervalls	Bild des Intervalls
Menge aller Zahlen zwischen a und b einschließlich der Grenzen	$[a; b]$	abgeschlossen	a ●━━━● b
Menge aller Zahlen zwischen a und b ohne die Grenzen	$]a; b[$	offen	a ○━━━○ b
Menge aller Zahlen zwischen a und b mit a, aber ohne b	$[a; b[$	halboffen	a ●━━━○ b
Menge aller Zahlen zwischen a und b ohne a, aber mit b	$]a; b]$	halboffen	a ○━━━● b

* intervallum (lat.) = Zwischenraum, eigentlich der Raum zwischen (= *inter*) zwei Pfählen (= *vallus*) einer Palisade.

Beachte: In der Intervallschreibweise darf die linke Zahl nicht größer sein als die rechte.

Wie man mit Intervallen umgeht, zeigen die folgenden

Beispiele: (Vgl. dazu Abbildung 149.1).

1) $0 \in [0; 3[$, $\quad 1{,}7 \in [0; 3[$, $\quad 3 \notin [0; 3[$

2) $[0; 3[\subset [-1{,}5; 6]$, $\quad \{4{,}1; 5; 6\tfrac{1}{3}; 7{,}99\} \subset]4; 8[$

3) $[-1{,}5; 6] \cap]4; 8[=]4; 6]$, $\quad [-6; -4[\cap [-4; -2] = \{\,\}$

4) $[-6; -4[\cup [-4; -2] = [-6; -2]$,
$[-1{,}5; 6] \cup]4; 8[= [-1{,}5; 8[$

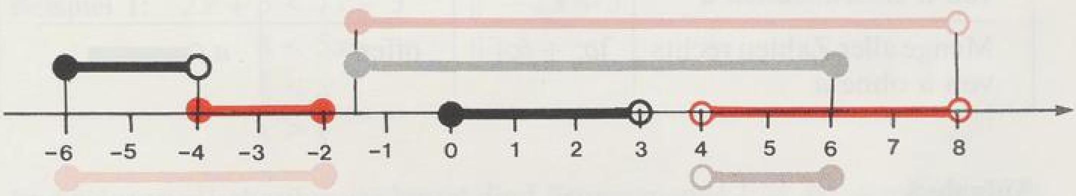


Abb. 149.1 Zu den Beispielen **1)** bis **4)**

Bei Halbgeraden gibt es auf einer Seite keinen Endpunkt, da es dort keine letzte Zahl gibt. Als Ersatz für die fehlende Grenze hat 1655 der englische Mathematiker John WALLIS (1616–1703) in seiner *Arithmetica Infinitorum* das Symbol ∞, gesprochen *unendlich*, eingeführt.

Die Römer schrieben mit dem Zeichen ∞ ihr Zahlwort *mille*, das einerseits *tausend* bedeutet, andererseits im übertragenen Sinn für *unzählig viele* verwendet wurde – denke nur an unseren Tausendfüßer! Ob die Römer WALLIS inspirierten, wissen wir nicht.*

Weil ∞ keine Zahl ist, gehört es niemals zum Intervall. Je nachdem, ob man nach links oder rechts ins Unendliche fortschreitet, unterscheidet man zwischen $-\infty$ und $+\infty$.

Abb. 149.2 John WALLIS (3.12.1616 Ashford/Kent – 8.11.1703 Oxford)

* Neben ∞ gab es noch ↀ und ⅭⅠↃ als Zeichen für mille. Das M ist im wesentlichen mittelalterlichen Ursprungs, wenngleich es sich gelegentlich auch in römischen Inschriften findet; frühester Beleg 89 v. Chr.

Damit haben wir

Definition 150.1:

Beschreibung des Intervalls	Intervall-symbol	Art des Intervalls	Bild des Intervalls
Menge aller Zahlen links von a einschließlich a	$]-\infty; a]$	halboffen	━━━━● a
Menge aller Zahlen links von a ohne a	$]-\infty; a[$	offen	━━━━○ a
Menge aller Zahlen rechts von a einschließlich a	$[a; +\infty[$	halboffen	a ●━━━━
Menge aller Zahlen rechts von a ohne a	$]a; +\infty[$	offen	a ○━━━━

Aufgaben

1. Zeichne die Intervalle
   a) $[2; 4]$ **b)** $[-1{,}5; 5{,}6]$ **c)** $]-2; -0{,}5]$
   d) $[1{,}4; 4{,}1[$ **e)** $]0; 5[$ **f)** $[1; 1]$
2. Schreibe als Intervall
   a) 2 ●———● 3,9 **b)** −7 ●———○ 3
   c) −1 ○———● 1 **d)** −8,3 ○———○ 16,6
3. Zeichne die Intervalle
   a) $[2; +\infty[$ **b)** $]-1; +\infty[$ **c)** $]-\infty; 0]$ **d)** $]-\infty; -2[$
4. Schreibe als Intervall
   a) −5 ●——— **b)** ———● 7
   c) ———○ 100 **d)** ———○ −13
5. Schreibe als Intervall
   a) $\mathbb{Q}$ **b)** $\mathbb{Q}^+$ **c)** $\mathbb{Q}^-$ **d)** $\mathbb{Q}_0^+$ **e)** $\mathbb{Q}_0^-$ **f)** $\{\}$
6. Entscheide für jede der Zahlen -5; 20; 0; $-3{,}1$; $1{,}5$ ob sie in dem folgenden Intervall liegt oder nicht:
   a) $]-5; 1{,}5]$ **b)** $[-3; 5]$ **c)** $]-10; 20]$ **d)** $]-5{,}5; 0[$
7. Bestimme das *größte abgeschlossene* Intervall mit ganzzahligen Grenzen, das eine Teilmenge des folgenden Intervalls ist:
   a) $]0; 5[$ **b)** $]-2{,}7; 3]$ **c)** $[-2{,}7; 3[$ **d)** $[-6; -1{,}1[$ **e)** $[-1; 2]$
8. Gib zu den Intervallen der Aufgabe 7 das jeweils *kleinste offene* Intervall mit ganzzahligen Grenzen an, welches das gegebene Intervall ganz überdeckt.

9. Bestimme folgende Schnitt- bzw. Vereinigungsmengen:

a) $[-1; 2] \cap]0; 4[$ **b)** $[-1; 2] \cup]0; 4[$
c) $[-3; -0{,}5] \cup [-0{,}5; 3[$ **d)** $[-3; -0{,}5] \cap [-0{,}5; 3[$
e) $\mathbb{N} \cap [0; 6[$ **f)** $(]-5; 0[\cup [-1; 4]) \cap \mathbb{Z}$

5.3.2 Kleiner- und Größer-Ungleichungen

Mit Hilfe der Äquivalenzumformungen können wir nun Ungleichungen wie z.B. $2x + 5 < 7x - 3$ lösen, wenn es uns gelingt, sie auf eine der Normalformen $x < a$ oder $x > a$ zu bringen.

Beispiel 1:
$$2x + 5 < 7x - 3 \quad \| -2x + 3$$
$$8 < 5x \quad \| :5$$
$$\tfrac{8}{5} < x$$
$$x > \tfrac{8}{5}$$

In der Intervallschreibweise lautet die Lösungsmenge $L =]\frac{8}{5}; +\infty[$. Sie läßt sich auch graphisch darstellen:

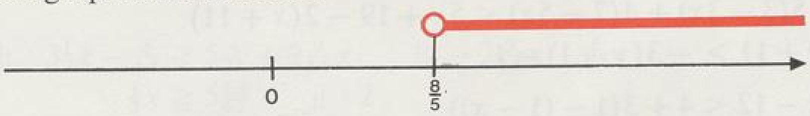


Abb. 151.1 Lösungsmenge der Ungleichung $2x + 5 < 7x - 3$

Es gibt aber auch Ungleichungen, die sich nicht auf die Normalformen $x < a$ bzw. $x > a$ bringen lassen, nämlich dann, wenn die Unbekannte bei den Äquivalenzumformungen »herausfällt«. Es bleibt in diesem Fall eine Ungleichung zwischen Zahlen übrig, also statt einer Aussageform nur eine Aussage. Ist diese wahr, dann ist die ursprüngliche Ungleichung allgemeingültig, ihre Lösungsmenge ist also $\mathbb{Q}$. Ist die übrigbleibende Zahlenungleichung eine falsche Aussage, dann ist die ursprüngliche Ungleichung widersprüchlich, ihre Lösungsmenge also $\{\,\}$. Die folgenden beiden Beispiele sollen dir das verdeutlichen.

Beispiel 2:
$$2x + 5 < 1\;\; - (5 - 2x)$$
$$2x + 5 < 17 - 5 + 2x$$
$$2x + 5 < 12 + 2x \quad \| -2x - 5$$
$$0 < 7; \quad \text{wahre Aussage! Also} \quad L = \mathbb{Q}.$$

Beispiel 3:
$$2x + 5 < 7 - (5 - 2x)$$
$$2x + 5 < 7 - 5 + 2x$$
$$2x + 5 < 2 + 2x \quad \| -2x - 5$$
$$0 < -3; \quad \text{falsche Aussage! Also} \quad L = \{\,\}.$$

Aufgaben

1. **a)** $x-3<5$ **b)** $2-x>-3$ **c)** $-x<-3$
d) $3x>18$ **e)** $\frac{2}{5}x<\frac{2}{5}$ **f)** $-\frac{3}{2}x>-\frac{3}{2}$
g) $-\frac{14}{5}x<24\frac{1}{2}$ **h)** $\frac{39}{49}<2\frac{10}{21}x$ **i)** $4\frac{11}{25}<-\frac{74}{75}x$

2. Schreibe die Lösungsmenge als Intervall.
a) $3x-11<12x-10$ **b)** $5-8x<x-13$
c) $15-6y>1-20y$ **d)** $-z>z-10$

3. Stelle die Lösungsmenge graphisch dar.
a) $\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}<\frac{1}{4}x+1\frac{3}{4}$ **b)** $15\frac{3}{8}-14\frac{5}{8}x>12\frac{1}{4}x+42{,}25$
c) $0{,}8-0{,}9z>\frac{3}{7}z+\frac{4}{5}$ **d)** $0{,}3y-\frac{1}{3}<\frac{1}{3}y-3\frac{2}{3}$

4. Schreibe die Lösungsmenge als Intervall.
a) $x-(3-x)>5-(5-x)$
b) $2y+3-(5+3y)<3-(2y-1)$
c) $5\frac{1}{2}-(3\frac{2}{7}z-\frac{1}{2})>8z+(7-\frac{2}{7}z)$

5. **a)** $11z-3(-z+4)>-(z-8)+5(2z-3)$
b) $-5(3-3x)+4(7-5x)<5x+19-2(x+11)$
c) $2y+11>-3(y+1)-1$

•6. **a)** $3x-12<4+3(1-(1-x))$
b) $7\frac{1}{4}x+3(-\frac{1}{12}x+\frac{4}{9})>4\frac{1}{4}x-6(\frac{11}{24}-\frac{11}{24}x)$
c) $-11x+(17-3x)\cdot 3<7-\frac{2}{5}(50x-3\frac{4}{7})$
d) $0{,}01x-0{,}1x+x<0{,}02x-0{,}31x+1{,}2x$

5.3.3 Höchstens- und Mindestens-Ungleichungen

In öffentlichen Verkehrsmitteln können Jugendliche zu einem günstigeren Tarif fahren, wenn sie höchstens 15 Jahre alt sind. Die Verbilligung kann also jeder in Anspruch nehmen, der 15 Jahre alt ist oder der weniger als 15 Jahre alt ist. Bezeichnet man die Anzahl der Jahre kurz mit j, so gibt es Fahrpreisermäßigung, falls gilt:

$$j=15 \vee j<15.$$

Die beiden Bedingungen dieser *Oder*-Aussageform faßt man zusammen zu

$$j \leqq 15$$

und liest dies als

»j ist **höchstens** 15« oder auch »j ist kleiner oder gleich 15«.

Zu Schuljahrsbeginn bietet ein Schreibwarengeschäft 5% Rabatt* bei Abnah-

* Vom italienischen *rabatto* = *Preisabschlag*. Erst im 17. Jh. wird unser *Rabatt* aus dem Italienischen entlehnt.

me von mindestens 10 Heften gleicher Art an. Diesen Preisnachlaß erhält man also, wenn man 10 Hefte oder mehr als 10 Hefte kauft. Bezeichnet man die Anzahl der Hefte kurz mit h, so wird Rabatt gewährt, falls gilt:

$$h = 10 \vee h > 10.$$

Die beiden Bedingungen dieser Oder-Aussageform faßt man zusammen zu

$$h \geqq 10$$

und liest dies als

»h ist **mindestens** 10« oder auch »h ist größer oder gleich 10«.

Definition 153.1:	$a \leqq b$	**bedeutet**	$a < b \vee a = b$
	$a \geqq b$	**bedeutet**	$a > b \vee a = b$
	$a \neq b$	**bedeutet**	$a < b \vee a > b$

Die Zeichen $\leqq$ und $\geqq$ wurden 1734 von Pierre BOUGUER (1698–1758) erfunden.

Ungleichungen mit $\leqq$ bzw. $\geqq$ löst man genauso wie Ungleichungen mit $<$ bzw. $>$. Dazu ein

Beispiel:
$$\begin{aligned} 3\tfrac{1}{7}x - \tfrac{5}{14} &\geqq 5\tfrac{4}{21} + 2\tfrac{9}{14}x \quad \| -2\tfrac{9}{14}x + \tfrac{5}{14} \\ \tfrac{1}{2}x &\geqq 5\tfrac{23}{42} \quad \| \cdot 2 \\ x &\geqq 11\tfrac{2}{21}. \end{aligned}$$

In Intervallschreibweise lautet die Lösungsmenge $L = [11\frac{2}{21}; +\infty[$. Abbildung 153.1 veranschaulicht L.

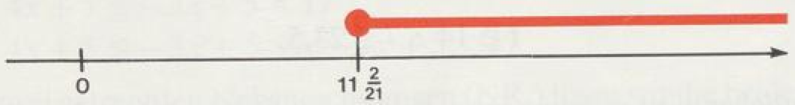


Abb. 153.1 Die Lösungsmenge $[11\frac{2}{21}; +\infty[$

Aufgaben

1. Löse die folgenden Ungleichungen. Veranschauliche die Lösungsmengen auf der Zahlengeraden.
   a) $x + 7 \leqq 9$ **b)** $x - 16 \leqq -17$ **c)** $x + 2{,}5 \geqq 5$
   d) $x - \frac{2}{3} \leqq \frac{7}{3}$ **e)** $x + \frac{3}{4} \geqq -1{,}75$ **f)** $x - 4 \neq 0$

2. Schreibe die Lösungsmenge als Intervall.
   a) $2x - 1 \leqq 1 - 2x$ **b)** $1 - x \geqq 17 - 17x$
   c) $12x - 7 \geqq 8x + 41$ **d)** $y - 19 \leqq 19y - 19$
   e) $8z - 1 \geqq 18z - 10$ **f)** $11w - 92 \leqq 108 + 11w$

3. Stelle die Lösungsmenge auf der Zahlengeraden dar.

a) $\frac{7}{4}x - \frac{1}{2} \leqq 3\frac{1}{2} - \frac{9}{4}x$ **b)** $18\frac{1}{3} - 7\frac{1}{2}x \leqq 3\frac{1}{4}x + 7\frac{7}{12}$

c) $0{,}01y - 12{,}7 \geqq 3{,}3 - 0{,}1y$ **d)** $\frac{3}{2}z + \frac{3}{2} \leqq \frac{3}{2} - \frac{3}{7}z$

• **4.** Schreibe die Lösungsmenge als Intervall.

a) $3x - (1 - 2x) \leqq -2(x - 1) + 7$

b) $3\frac{1}{4} - 2\frac{1}{7}(\frac{1}{3}x - 3\frac{3}{4}) \geqq 2\frac{1}{2}x(1\frac{1}{2} - 0{,}75) + (2\frac{1}{8} + \frac{1}{4}x)$

• **5.** **a)** $2{,}1x + 2{,}1(0{,}1x - 2{,}1(1 - 0{,}01x)) \leqq 2{,}1 - 2{,}1((1 - 2x) + 2{,}1)$

b) $\frac{1}{2}(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}x) - \frac{1}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}x) \geqq \frac{1}{5}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x)$

5.3.4 Doppelungleichungen

Die Deutsche Bundespost erkennt Sendungen nur dann als Briefe an, wenn sie gewisse Mindest- und Höchstmaße erfüllen. So muß z. B. die Länge mindestens 14 cm und darf höchstens 23,5 cm betragen. Bezeichnet man kurz mit l die Länge in cm, so muß für einen Brief gelten:

$$l \geqq 14 \quad \text{und} \quad l \leqq 23{,}5\,.$$

Eine Länge ist Lösung dieser *Und*-Aussageform, wenn beim Einsetzen eine wahre Und-Aussage entsteht. Eine **Und-Aussage** in der Mathematik ist eine Verknüpfung zweier Aussagen durch das Wort *und*, das man symbolisch durch $\wedge$ wiedergibt. Eine Und-Aussage ist genau dann wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind.

Die obigen Bedingungen für die Länge lassen sich mit dem $\wedge$-Symbol kurz schreiben:

$$l \geqq 14 \wedge l \leqq 23{,}5\,.$$

Übersichtlicher wird es, wenn man nur Ungleichheitszeichen derselben Richtung verwendet, also

$$14 \leqq l \wedge l \leqq 23{,}5 \quad \text{oder auch} \quad l \geqq 14 \wedge 23{,}5 \geqq l$$

schreibt. Stimmen dann die rechte Seite der ersten und die linke Seite der zweiten Ungleichung überein, so kann man beide Ungleichungen zu einer **Doppelungleichung** zusammenfassen. Statt $14 \leqq l \wedge l \leqq 23{,}5$ schreibt man kurz

$$14 \leqq l \leqq 23{,}5\,.$$

Bei der Notierung $l \geqq 14 \wedge 23{,}5 \geqq l$ läßt sich unsere Regel nicht anwenden! Weil die Reihenfolge der Bedingungen in einer Und-Verknüpfung aber keine Rolle spielt, so kann man sie auch in der Form $23{,}5 \geqq l \wedge l \geqq 14$ schreiben, was sich nun zu $23{,}5 \geqq l \geqq 14$ zusammenfassen läßt. – Wir merken uns

Definition 155.1: $a \leqq b \leqq c$ **bedeutet** $a \leqq b \wedge b \leqq c$
$a < b < c$ **bedeutet** $a < b \wedge b < c$
$a \geqq b > c$ **bedeutet** $a \geqq b \wedge b > c$
$a > b \geqq c$ **bedeutet** $a > b \wedge b \geqq c$
usw.

Bemerkungen: **1)** Die Doppelungleichung $a < b < c$ drückt aus, daß b **zwischen** a und c liegt.
2) Doppelungleichungen mit *gegenläufigen* Ungleichheitszeichen wie $a < b > c$ sind nicht erlaubt! Näheres dazu in Aufgabe 156/**5**.

Eine Doppelungleichung mit einer Unbekannten löst man, indem man die beiden durch $\wedge$ verknüpften Ungleichungen einzeln löst. Weil eine Lösung der Doppelungleichung die beiden Teilungleichungen zugleich erfüllen muß, ist die Lösungsmenge der Doppelungleichung die Schnittmenge der beiden Teillösungsmengen. Das $\wedge$-Zeichen erinnert an das Schnittmengenzeichen $\cap$. Merke dir also den

Satz 155.1: Die Lösungsmenge einer Doppelungleichung ist die Schnittmenge der Lösungsmengen der beiden Teilungleichungen.

Beispiel:

$$4x + 5 \leqq -3x + 5 < 17$$
$$\Leftrightarrow 4x + 5 \leqq -3x + 5 \;\wedge\; -3x + 5 < 17$$

In zwei getrennten Nebenrechnungen (NR.) lösen wir die beiden Teilungleichungen:

$$\begin{aligned} \text{NR. 1:}\quad 4x + 5 &\leqq -3x + 5 && \| +3x - 5 \\ 7x &\leqq 0 && \| :7 \\ x &\leqq 0 \\ \Rightarrow L_1 &=]-\infty; 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{NR. 2:}\quad -3x + 5 &< 17 && \| -5 \\ -3x &< 12 && \| :(-3) \\ x &> -4 \\ \Rightarrow L_2 &=]-4; +\infty[\end{aligned}$$

Als Lösungsmenge L für die Doppelungleichung erhalten wir somit $L = L_1 \cap L_2 =]-4; 0]$. Abbildung 156.1 veranschaulicht die Entstehung von L.

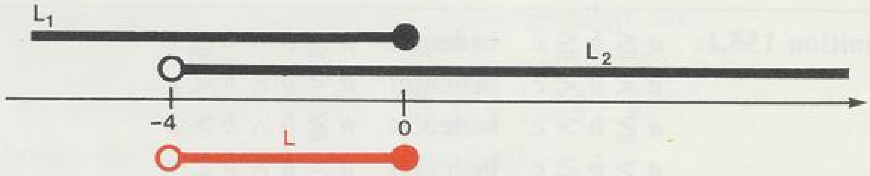


Abb. 156.1 $L = L_1 \cap L_2$

Aufgaben

1. Schreibe als Doppelungleichung und gib die Lösungsmenge als Intervall an.
 a) $x > -1 \wedge x \leqq 5$ **b)** $x \leqq 0 \wedge x \geqq -3{,}5$
 c) $x \leqq -7 \wedge x > -10$ **d)** $15 < x \wedge 22 > x$

2. Bestimme die Lösungsmenge als Intervall und stelle sie auf der Zahlengeraden dar.
 a) $0 \leqq 2x - 1 \leqq 1$ **b)** $0 < 1 - \frac{3}{4}x < 2$ **c)** $84 > 7(5 - \frac{2}{3}x) \geqq -153$

3. Bestimme die Lösungsmenge als Intervall.
 a) $0 < x \leqq 1 - x$ **b)** $2x \leqq 1 \leqq 3x$ **c)** $3x < 1 < 2x$

4. **a)** $2x - 1 < 3x - 1 \leqq 1 - x$
 •**b)** $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4} < \frac{5}{4}x - \frac{1}{2} < -\frac{5}{6}x + \frac{3}{4}$
 •**c)** $0{,}1(0{,}1 - 2x) \geqq 1{,}01x - 0{,}5(2x - 0{,}3) > -0{,}7x - 1{,}27$

5. **a)** In einer Doppelungleichung verbirgt sich neben den beiden Teilungleichungen der Und-Aussage noch eine weitere Ungleichung; sie entsteht, wenn man das Mittelstück und ein Ungleichheitszeichen wegnimmt. Wie heißen die drei Ungleichungen, die man aus $-3 < x < 1$ erhält?
 b) Hans baut die Und-Aussageform $3 < x \wedge x > -10$ zu einer »Doppelungleichung« der Art $-3 < x > -10$ zusammen.
 Sabine zeigt ihm, daß sich dann beim Vorgehen nach **a)** ein Widerspruch ergibt. Welcher?
 Trotzdem hat die Und-Aussageform $-3 < x \wedge x > -10$ eine Lösungsmenge. Gib sie als Intervall an.

5.3.5 Ungleichungen mit Absolutbeträgen

In Gleichungen und in Ungleichungen kann auch der Betrag der Unbekannten auftreten. Die einfachste solche Gleichung ist von der Art $|x| = 4$, die einfachsten Ungleichungen sind von der Art $|x| < 4$ bzw. $|x| > 4$.
Die Lösung ist ganz einfach, wenn wir uns an die Definition des Betrags (Definition 43.1) erinnern: $|x|$ ist die Entfernung des Punkts x vom Nullpunkt auf der Zahlengeraden.

Die Information $|x| = 4$ teilt uns mit, daß die Zahl x bzw. der zugehörige Punkt auf der Zahlengeraden 4 Einheiten vom Nullpunkt entfernt ist. Diese Information ist nicht eindeutig, weil sie auf die beiden Zahlen 4 und -4 zutrifft. Also gilt:

$|x| = 4 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -4.$

Die Lösungsmenge ist $L = \{-4; 4\}$.

Abb. 157.1 Die Lösungsmenge von $|x| = 4$

Durch die Information $|x| < 4$ wird uns mitgeteilt, daß die Zahl x weniger als 4 Einheiten vom Nullpunkt entfernt liegt. Alle Zahlen zwischen -4 und 4 erfüllen diese Bedingung. Also gilt:

$|x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4.$

Die Lösungsmenge ist $L =]-4; 4[$.

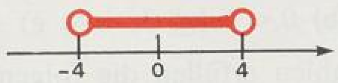


Abb. 157.2 Die Lösungsmenge von $|x| < 4$

Durch die Information $|x| > 4$ wird uns mitgeteilt, daß die Zahl x mehr als 4 Einheiten vom Nullpunkt entfernt liegt. Alle Zahlen links von -4 oder rechts von 4 erfüllen diese Bedingung. Also gilt:

$|x| > 4 \Leftrightarrow x < -4 \vee x > 4.$

Die Lösungsmenge ist $L =]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[$.

Mit Hilfe des Ohne-Symbols $\setminus$ läßt sich L statt als Vereinigungsmenge auch als Restmenge schreiben, nämlich zu $L = \mathbb{Q} \setminus [-4; 4]$. Eine solche Schreibweise kann gelegentlich übersichtlicher sein.

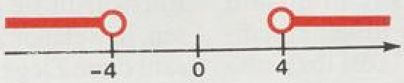


Abb. 157.3 Die Lösungsmenge von $|x| > 4$

Man kann also die angegebenen einfachen Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen auf betragsfreie Formen äquivalent umschreiben.

Wir merken uns

> **Satz 158.1:** **Für $a > 0$ gilt**
> $$|x| = a \Leftrightarrow x = -a \vee x = a$$
> $$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$
> $$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a.$$

Aufgaben

1. Welche Zahlen erfüllen die Gleichung?
   a) $|x| = 4{,}5$ **b)** $|x| = 1986$ **c)** $|x| = 0{,}1$
   d) $|x| = 0$ **e)** $|x| = -\frac{2}{3}$ **f)** $|x| = |3{,}7 - 5{,}9|$
2. Gib die Lösungsmenge der Ungleichung an und stelle sie auf der Zahlengeraden dar.
   a) $|x| < 1$ **b)** $|x| \leqq 4{,}5$ **c)** $|x| > -2$ **d)** $|x| \leqq -4$
   e) $|x| \geqq 3{,}6$ **f)** $|x| > 3\frac{1}{7}$ **g)** $|x| \leqq 3{,}14$ **h)** $\frac{8}{9} \leqq |x|$
3. Stelle die Lösungsmenge auf der Zahlengeraden dar.
   a) $2 \leqq |x| \leqq 4$ **b)** $0 < |x| \leqq 3$ **c)** $4 > |x| > 1$
4. Welche rationalen Zahlen erfüllen die folgenden UND-Bedingungen? Stelle dazu die Lösungsmengen der Teilbedingungen und die der Gesamtbedingung auf der Zahlengeraden dar.
   a) $|x| > 1$ und $|x| \leqq 5$ **b)** $|x| \leqq 1$ und $|x| > 0{,}5$
   c) $x < 0{,}3$ und $|x| > 3{,}5$ **d)** $-2{,}75 \leqq |x|$ und $x \geqq -1{,}5$
   e) $x > -1$ und $|x| \leqq 4$ **f)** $|x| < 6$ und $x < -2$

Zu Seite 159:

Uno lione mangia una chapra in 2 dì et uno lupo la mangia in 3 dì et una gholpe la mangia in 5 dì: vo' sapere in quanto tempo tuttj questj animalj insieme mangereb[o]no detta capra: fa' così togli uno numero che abbi $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$ torraj 30 poi diraj el $\frac{1}{2}$ di 30 è 15 el $\frac{1}{3}$ è 10 e'l $\frac{1}{5}$ è 6 racogli fa 31 e questo è 'l partitore; poi partj 30 per 31, ne viene $\frac{30}{31}$ di dì et in tanto tempo la mangerebono.

Ein Löwe frißt eine Ziege in 2 Tagen, und ein Wolf frißt sie in 3 Tagen, und ein Fuchs frißt sie in 5 Tagen. Du willst wissen, in welcher Zeit all diese Tiere gemeinsam diese Ziege fräßen. Mach es wie folgt. Nimm eine Zahl, die $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$ hat, nimm 30; dann sage: $\frac{1}{2}$ von 30 ist 15, $\frac{1}{3}$ ist 10 und $\frac{1}{5}$ ist 6. Zähle zusammen, das ergibt 31, und das ist der Teiler. Teile dann 30 durch 31, daraus erhält man $\frac{30}{31}$ des Tages, und in dieser Zeit fräßen sie sie.