Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

5.1 Was ist eine Ungleichung?

5 Ungleichungen

5.1 Was ist eine Ungleichung?

Wir erinnern daran, daß $a < b$ anschaulich bedeutet, daß die Zahl a auf der Zahlengeraden links von der Zahl b liegt. Rechnerisch bedeutet $a < b$: Es gibt eine positive Zahl p, so daß $a + p = b$ gilt. Abbildung 144.1 veranschaulicht dies.

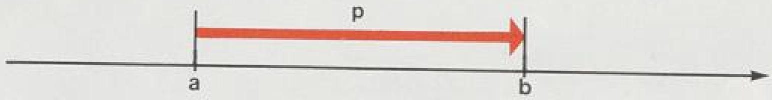

Abb. 144.1 $a < b \Leftrightarrow$ Es gibt ein $p > 0$, so daß $a + p = b$.

Was aber bedeutet eine Ungleichung, die eine Variable enthält?
Betrachten wir z. B. die Ungleichung

$2x - 3 < 1 - x$.

Wie bei einer Gleichung haben wir eine Information über eine unbekannte Zahl x vor uns. Diese Information ist in der vorliegenden Form noch sehr undurchsichtig. Durch Probieren kann man womöglich Zahlen finden, die der Information entsprechen. Nehmen wir z. B. für x die Zahlen 0, 2 oder -2, so erhalten wir der Reihe nach die Zahlen-Ungleichungen

$-3 < 1 \qquad 1 < -1 \qquad -7 < 3$.

Die erste und die dritte sind richtig, die mittlere falsch. Wir sehen, daß durch die Information $2x - 3 < 1 - x$ die Zahl x nicht eindeutig festgelegt ist, da bereits die beiden Zahlen 0 und -2 der Ungleichung genügen. Wie bei Gleichungen möchten wir aber alle Zahlen kennen, die der Information genügen. Betrachtet man die Ungleichung als Aussageform, dann bilden diese Lösungszahlen gerade die Lösungsmenge der Ungleichung.
Bei Ungleichungen der Form $x < 5$ oder $x > -2{,}3$ kann man die Lösungsmenge sofort sehen. Wir veranschaulichen sie auf der Zahlengeraden. Dabei soll der kleine, nicht ausgefüllte Kreis über 5 bzw. $-2{,}3$ andeuten, daß die Zahl 5 bzw. $-2{,}3$ nicht zur Lösungsmenge gehört.

Abb. 144.2 Lösungsmenge der Ungleichung $x < 5$

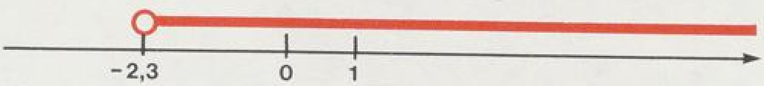

Abb. 144.3 Lösungsmenge der Ungleichung $x > -2{,}3$

Unser Ziel ist es, Ungleichungen so lange umzuformen, bis man auf solche einfache Ungleichungen stößt. Das ist immer dann erreicht, wenn man die Unbekannte auf einer Seite der Ungleichung isoliert hat. Dabei dürfen aber weder Lösungen hinzukommen noch verlorengehen. Wie bei Gleichungen legt man daher fest:

Definition 145.1: Zwei Ungleichungen heißen äquivalent, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.
Eine Ungleichungsumformung heißt Äquivalenzumformung, wenn die ursprüngliche Ungleichung und die umgeformte Ungleichung äquivalent sind.

5.2 Äquivalenzumformungen von Ungleichungen

Ersetzt man in einer Ungleichung einen Term durch einen äquivalenten, so ändert sich die Lösungsmenge nicht, weil bei jeder Einsetzung der alte und der neue Term den gleichen Zahlenwert liefern.

Beispiel: $3x - 5 + x < 7x - (13 - 19)$
$4x - 5 < 7x + 6$

Für die Addition von Termen gilt

Satz 145.1: Monotoniegesetz der Addition
Addiert man auf beiden Seiten einer Ungleichung einen Term, so bleibt das Ungleichheitszeichen erhalten; kurz

$$T_1 < T_2 \quad \| + T$$
$$\Leftrightarrow T_1 + T < T_2 + T$$

Bemerkung: Satz 145.1 gilt natürlich auch für die Subtraktion eines Terms, da die Subtraktion eines Terms T ja nichts anderes als die Addition des Terms $-T$ ist.

Beweis: Ist a ein Element der Lösungsmenge der Ungleichung $T_1 < T_2$, dann gilt $T_1(a) < T_2(a)$. Auf Grund des Monotoniegesetzes der Addition für rationale Zahlen (Satz 62.1) kann man auf beiden Seiten die Zahl $T(a)$ addieren und erhält $T_1(a) + T(a) < T_2(a) + T(a)$. (Siehe Abbildung 145.1) Also ist a auch Lösung der Ungleichung $T_1 + T < T_2 + T$. Wir haben somit bei der Addition des Terms T keine Lösung verloren.

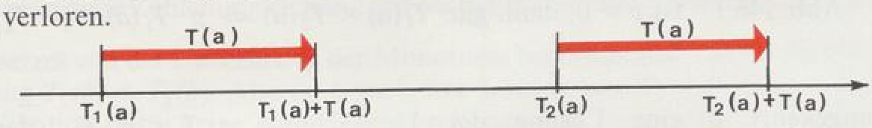

Abb. 145.1 $T_1(a) < T_2(a) \Leftrightarrow T_1(a) + T(a) < T_2(a) + T(a)$