Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

5.2 Äquivalenzumformungen von Ungleichungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

Unser Ziel ist es, Ungleichungen so lange umzuformen, bis man auf solche einfache Ungleichungen stößt. Das ist immer dann erreicht, wenn man die Unbekannte auf einer Seite der Ungleichung isoliert hat. Dabei dürfen aber weder Lösungen hinzukommen noch verlorengehen. Wie bei Gleichungen legt man daher fest:

Definition 145.1: Zwei Ungleichungen heißen äquivalent, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.
Eine Ungleichungsumformung heißt Äquivalenzumformung, wenn die ursprüngliche Ungleichung und die umgeformte Ungleichung äquivalent sind.

5.2 Äquivalenzumformungen von Ungleichungen

Ersetzt man in einer Ungleichung einen Term durch einen äquivalenten, so ändert sich die Lösungsmenge nicht, weil bei jeder Einsetzung der alte und der neue Term den gleichen Zahlenwert liefern.

Beispiel: $3x - 5 + x < 7x - (13 - 19)$
$$4x - 5 < 7x + 6$$

Für die Addition von Termen gilt

Satz 145.1: Monotoniegesetz der Addition
Addiert man auf beiden Seiten einer Ungleichung einen Term, so bleibt das Ungleichheitszeichen erhalten; kurz

$$\begin{aligned} T_1 &< T_2 \quad \| + T \\ \Leftrightarrow T_1 + T &< T_2 + T \end{aligned}$$

Bemerkung: Satz 145.1 gilt natürlich auch für die Subtraktion eines Terms, da die Subtraktion eines Terms T ja nichts anderes als die Addition des Terms $-T$ ist.

Beweis: Ist a ein Element der Lösungsmenge der Ungleichung $T_1 < T_2$, dann gilt $T_1(a) < T_2(a)$. Auf Grund des Monotoniegesetzes der Addition für rationale Zahlen (Satz 62.1) kann man auf beiden Seiten die Zahl $T(a)$ addieren und erhält $T_1(a) + T(a) < T_2(a) + T(a)$. (Siehe Abbildung 145.1) Also ist a auch Lösung der Ungleichung $T_1 + T < T_2 + T$. Wir haben somit bei der Addition des Terms T keine Lösung verloren.

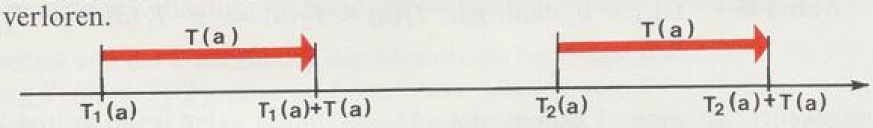

Abb. 145.1 $T_1(a) < T_2(a) \Leftrightarrow T_1(a) + T(a) < T_2(a) + T(a)$

Ist umgekehrt b eine Lösung der Ungleichung $T_1 + T < T_2 + T$, dann gilt $T_1(b) + T(b) < T_2(b) + T(b)$. Addiert man hier auf beiden Seiten die Zahl $-T(b)$, so erhält man nach dem Monotoniegesetz der Addition für rationale Zahlen die Zahlenungleichung $T_1(b) < T_2(b)$. Also ist b auch eine Lösung der Ungleichung $T_1 < T_2$. Somit kann durch die Addition des Terms T keine Lösung hinzugekommen sein. Die Ungleichungen $T_1 < T_2$ und $T_1 + T < T_2 + T$ sind also äquivalent.

Beispiel: $4x - 5 < 7x + 6 \quad \| -4x - 6$

$-11 < 3x$

Bei der Multiplikation von Ungleichungen mit Zahlen muß man aufpassen, da es zwei Monotoniegesetze gibt, eines für positive Multiplikatoren und eines für negative Multiplikatoren. Du kennst sie für rationale Zahlen bereits als Satz 81.1 und Satz 81.2.
Deshalb müssen wir auch bei den Äquivalenzumformungen von Ungleichungen mit Variablen zwei Monotoniegesetze unterscheiden.

Satz 146.1: Monotoniegesetz der Multiplikation
Multipliziert man eine Ungleichung mit einer *positiven* Zahl, so bleibt das Ungleichheitszeichen erhalten, kurz

$$\mathbf{T_1 < T_2 \quad \| \cdot p, \quad \text{wobei} \quad p > 0}$$
$$\mathbf{\Leftrightarrow p \cdot T_1 < p \cdot T_2}$$

Bemerkung: Satz 146.1 gilt natürlich auch für die Division durch eine positive Zahl, da die Division durch p ja nichts anderes ist als die Multiplikation mit $\frac{1}{p}$.

Beweis: Ist a ein Element der Lösungsmenge der Ungleichung $T_1 < T_2$, dann gilt $T_1(a) < T_2(a)$. Auf Grund des Monotoniegesetzes der Multiplikation für rationale Zahlen (Satz 81.1) kann man beide Seiten mit der positiven Zahl p multiplizieren und erhält $p \cdot T_1(a) < p \cdot T_2(a)$. (Siehe Abbildung 146.1) Also ist a auch Lösung der Ungleichung $p \cdot T_1 < p \cdot T_2$. Bei der Multiplikation mit p ist keine Lösung verlorengegangen!

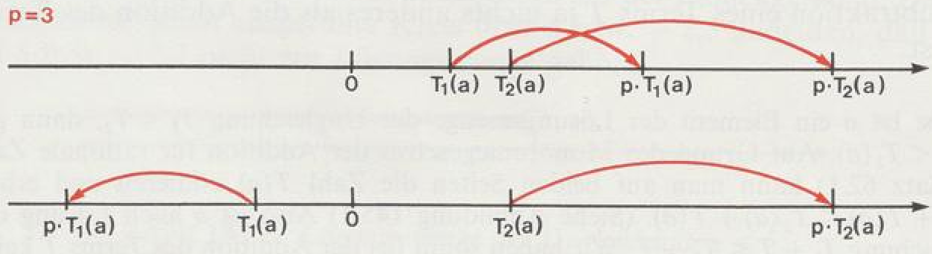

Abb. 146.1 Ist $p > 0$, dann gilt: $T_1(a) < T_2(a) \Leftrightarrow p \cdot T_1(a) < p \cdot T_2(a)$.

Ist umgekehrt b eine Lösung der Ungleichung $p \cdot T_1 < p \cdot T_2$, dann gilt $p \cdot T_1(b) < p \cdot T_2(b)$. Multipliziert man diese Zahlenungleichung mit der positiven

Zahl $\frac{1}{p}$, dann gilt nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation für rationale Zahlen die Zahlenungleichung $T_1(b) < T_2(b)$. Also ist b auch eine Lösung von $T_1 < T_2$. Bei der Multiplikation mit p ist keine Lösung hinzugekommen!
Die Ungleichungen $T_1 < T_2$ und $p \cdot T_1 < p \cdot T_2$ mit positivem p sind daher äquivalent.

Beispiel: $-11 < 3x \quad \| \cdot \frac{1}{3}$
$-\frac{11}{3} < x$

Damit haben wir durch drei Äquivalenzumformungen die eingangs gegebene Ungleichung $3x - 5 + x < 7x - (13 - 19)$ schließlich auf die äquivalente Form $-\frac{11}{3} < x$ gebracht, bei der wir die Lösungsmenge sofort erkennen können; Abbildung 147.1 zeigt sie.

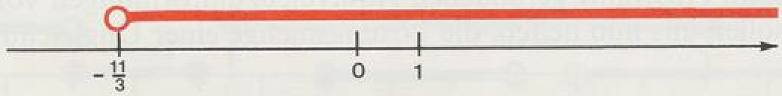

Abb. 147.1 Die Lösungsmenge der Ungleichung $3x - 5 + x < 7x - (13 - 19)$

Nun zum zweiten Monotoniegesetz der Multiplikation!

Satz 147.1: Gesetz von der Umkehrung der Monotonie
Multipliziert man eine Ungleichung mit einer *negativen* Zahl, so wird aus dem Kleiner-Zeichen ein Größer-Zeichen bzw. aus dem Größer-Zeichen ein Kleiner-Zeichen; man sagt dafür auch, das Ungleichheitszeichen kehrt sich um.
Kurz

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{T_1 < T_2 \quad \| \cdot q, \quad \text{wobei} \quad q < 0} \\ \Leftrightarrow \; & \boldsymbol{q \cdot T_1 > q \cdot T_2} \end{aligned}$$

Bemerkung: Satz 147.1 gilt natürlich auch für die Division durch eine negative Zahl.

Beweis: Ist a ein Element der Lösungsmenge der Ungleichung $T_1 < T_2$, dann gilt $T_1(a) < T_2(a)$. Auf Grund des Gesetzes von der Umkehrung der Monotonie bei rationalen Zahlen (Satz 81.2) erhält man daraus bei Multiplikation mit einem negativen q die Zahlenungleichung $q \cdot T_1(a) > q \cdot T_2(a)$. (Siehe Abbildung 148.1) Also ist a auch Lösung der Ungleichung $q \cdot T_1 > q \cdot T_2$. Keine Lösung ist verlorengegangen!
Ist umgekehrt b eine Lösung von $q \cdot T_1 > q \cdot T_2$, dann gilt $q \cdot T_1(b) > q \cdot T_2(b)$. Multipliziert man diese Zahlenungleichung mit der negativen Zahl $\frac{1}{q}$, dann erhält man wegen des Gesetzes von der Umkehrung der Monotonie bei rationalen Zahlen die Zahlenungleichung $T_1(b) < T_2(b)$. Also ist b auch eine Lösung von $T_1 < T_2$. Somit ist bei der Multiplikation mit q keine Lösung hinzugekommen!
Die Ungleichungen $T_1 < T_2$ und $q \cdot T_1 > q \cdot T_2$ mit negativem q sind somit äquivalent.

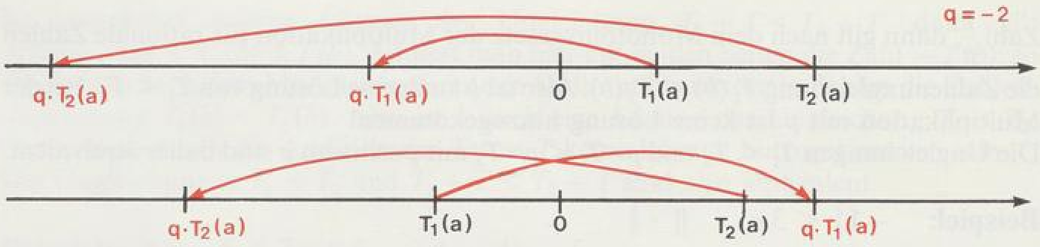

Abb. 148.1 Ist $q < 0$, dann gilt: $T_1(a) < T_2(a) \Leftrightarrow q \cdot T_1(a) > q \cdot T_2(a)$.

Beispiel: $-\frac{2}{3}x < -6 \quad \| \cdot (-\frac{3}{2})$
$x > 9$

Die in diesem Abschnitt gefundenen Äquivalenzumformungen von Ungleichungen sollen uns nun helfen, die Lösungsmenge einer Ungleichung zu bestimmen.

5.3 Lösen von Ungleichungen

5.3.1 Intervalle

Die Lösungsmengen von Ungleichungen enthalten meistens unendlich viele Lösungen, denen auf der Zahlengeraden Strecken oder Halbgeraden entsprechen. Diese Zahlenmengen nennen wir Intervalle*. Für Intervalle gibt es in der Mathematik Kurzbezeichnungen:

Definition 148.1:

Beschreibung des Intervalls	Intervall-symbol	Art des Intervalls	Bild des Intervalls
Menge aller Zahlen zwischen a und b einschließlich der Grenzen	$[a; b]$	abge-schlossen	a ●━━━● b
Menge aller Zahlen zwischen a und b ohne die Grenzen	$]a; b[$	offen	a ○━━━○ b
Menge aller Zahlen zwischen a und b mit a, aber ohne b	$[a; b[$	halboffen	a ●━━━○ b
Menge aller Zahlen zwischen a und b ohne a, aber mit b	$]a; b]$	halboffen	a ○━━━● b

* intervallum (lat.) = Zwischenraum, eigentlich der Raum zwischen (= *inter*) zwei Pfählen (= *vallus*) einer Palisade.