# Algebra

**Barth, Friedrich**

**München, 1996**

5.3.1 Intervalle

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

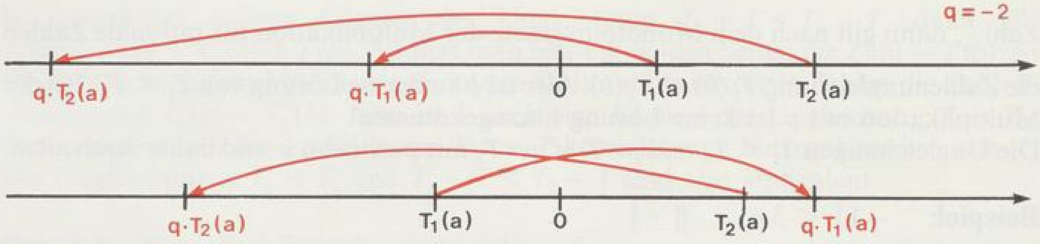



Abb. 148.1 Ist $q < 0$, dann gilt: $T_1(a) < T_2(a) \Leftrightarrow q \cdot T_1(a) > q \cdot T_2(a)$.

**Beispiel:** $-\frac{2}{3}x < -6 \qquad \| \cdot (-\frac{3}{2})$

$x > 9$

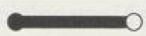
Die in diesem Abschnitt gefundenen Äquivalenzumformungen von Ungleichungen sollen uns nun helfen, die Lösungsmenge einer Ungleichung zu bestimmen.

## 5.3 Lösen von Ungleichungen

### 5.3.1 Intervalle

Die Lösungsmengen von Ungleichungen enthalten meistens unendlich viele Lösungen, denen auf der Zahlengeraden Strecken oder Halbgeraden entsprechen. Diese Zahlenmengen nennen wir Intervalle*. Für Intervalle gibt es in der Mathematik Kurzbezeichnungen:

**Definition 148.1:**

| Beschreibung des Intervalls | Intervall-symbol | Art des Intervalls | Bild des Intervalls |
|---|---|---|---|
| Menge aller Zahlen zwischen $a$ und $b$ einschließlich der Grenzen | $[a; b]$ | abge-schlossen | $a$  $b$ |
| Menge aller Zahlen zwischen $a$ und $b$ ohne die Grenzen | $]a; b[$ | offen | $a$  $b$ |
| Menge aller Zahlen zwischen $a$ und $b$ mit $a$, aber ohne $b$ | $[a; b[$ | halboffen | $a$  $b$ |
| Menge aller Zahlen zwischen $a$ und $b$ ohne $a$, aber mit $b$ | $]a; b]$ | halboffen | $a$  $b$ |

* intervallum (lat.) = Zwischenraum, eigentlich der Raum zwischen (= *inter*) zwei Pfählen (= *vallus*) einer Palisade.

*Beachte:* In der Intervallschreibweise darf die linke Zahl nicht größer sein als die rechte.

Wie man mit Intervallen umgeht, zeigen die folgenden

**Beispiele:** (Vgl. dazu Abbildung 149.1).

**1)** $0 \in [0; 3[$, $\quad 1{,}7 \in [0; 3[$, $\quad 3 \notin [0; 3[$

**2)** $[0; 3[ \subset [-1{,}5; 6]$, $\quad \{4{,}1; 5; 6\tfrac{1}{3}; 7{,}99\} \subset ]4; 8[$

**3)** $[-1{,}5; 6] \cap ]4; 8[ = ]4; 6]$, $\quad [-6; -4[ \cap [-4; -2] = \{\,\}$

**4)** $[-6; -4[ \cup [-4; -2] = [-6; -2]$,
$[-1{,}5; 6] \cup ]4; 8[ = [-1{,}5; 8[$

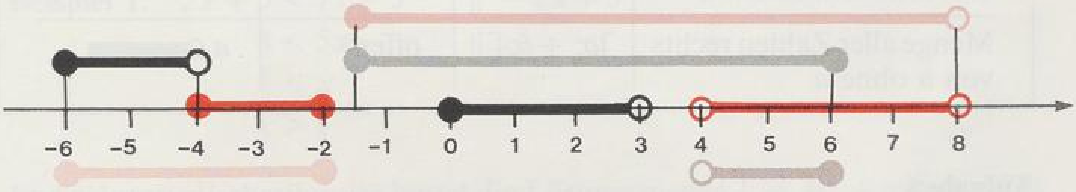



Abb. 149.1 Zu den Beispielen **1)** bis **4)**

Bei Halbgeraden gibt es auf einer Seite keinen Endpunkt, da es dort keine letzte Zahl gibt. Als Ersatz für die fehlende Grenze hat 1655 der englische Mathematiker John Wallis (1616–1703) in seiner *Arithmetica Infinitorum* das Symbol $\infty$, gesprochen *unendlich*, eingeführt.

Die Römer schrieben mit dem Zeichen $\infty$ ihr Zahlwort *mille*, das einerseits *tausend* bedeutet, andererseits im übertragenen Sinn für *unzählig viele* verwendet wurde – denke nur an unseren Tausendfüßer! Ob die Römer Wallis inspirierten, wissen wir nicht.*

Weil $\infty$ keine Zahl ist, gehört es niemals zum Intervall. Je nachdem, ob man nach links oder rechts ins Unendliche fortschreitet, unterscheidet man zwischen $-\infty$ und $+\infty$.

1698

John Wallis.

Abb. 149.2 John Wallis (3.12.1616 Ashford/Kent – 8.11.1703 Oxford)

* Neben $\infty$ gab es noch ↀ und CIↃ als Zeichen für mille. Das M ist im wesentlichen mittelalterlichen Ursprungs, wenngleich es sich gelegentlich auch in römischen Inschriften findet; frühester Beleg 89 v. Chr.

Damit haben wir

**Definition 150.1:**

| Beschreibung des Intervalls | Intervallsymbol | Art des Intervalls | Bild des Intervalls |
|---|---|---|---|
| Menge aller Zahlen links von $a$ einschließlich $a$ | $]-\infty; a]$ | halboffen | ━━━━● $a$ |
| Menge aller Zahlen links von $a$ ohne $a$ | $]-\infty; a[$ | offen | ━━━━○ $a$ |
| Menge aller Zahlen rechts von $a$ einschließlich $a$ | $[a; +\infty[$ | halboffen | $a$ ●━━━━ |
| Menge aller Zahlen rechts von $a$ ohne $a$ | $]a; +\infty[$ | offen | $a$ ○━━━━ |

**Aufgaben**

1. Zeichne die Intervalle
   **a)** $[2; 4]$ **b)** $[-1{,}5; 5{,}6]$ **c)** $]-2; -0{,}5]$
   **d)** $[1{,}4; 4{,}1[$ **e)** $]0; 5[$ **f)** $[1; 1]$

2. Schreibe als Intervall
   **a)** $2$ ●———● $3{,}9$ **b)** $-7$ ●———○ $3$
   **c)** $-1$ ○———● $1$ **d)** $-8{,}3$ ○———○ $16{,}6$

3. Zeichne die Intervalle
   **a)** $[2; +\infty[$ **b)** $]-1; +\infty[$ **c)** $]-\infty; 0]$ **d)** $]-\infty; -2[$

4. Schreibe als Intervall
   **a)** $-5$ ●——— **b)** ———● $7$
   **c)** ———○ $100$ **d)** ———○ $-13$

5. Schreibe als Intervall
   **a)** $\mathbb{Q}$ **b)** $\mathbb{Q}^+$ **c)** $\mathbb{Q}^-$ **d)** $\mathbb{Q}_0^+$ **e)** $\mathbb{Q}_0^-$ **f)** $\{\}$

6. Entscheide für jede der Zahlen $-5$; $20$; $0$; $-3{,}1$; $1{,}5$ ob sie in dem folgenden Intervall liegt oder nicht:
   **a)** $]-5; 1{,}5]$ **b)** $[-3; 5]$ **c)** $]-10; 20]$ **d)** $]-5{,}5; 0[$

7. Bestimme das *größte abgeschlossene* Intervall mit ganzzahligen Grenzen, das eine Teilmenge des folgenden Intervalls ist:
   **a)** $]0; 5[$ **b)** $]-2{,}7; 3]$ **c)** $[-2{,}7; 3[$ **d)** $[-6; -1{,}1[$ **e)** $[-1; 2]$

8. Gib zu den Intervallen der Aufgabe 7 das jeweils *kleinste offene* Intervall mit ganzzahligen Grenzen an, welches das gegebene Intervall ganz überdeckt.

**9.** Bestimme folgende Schnitt- bzw. Vereinigungsmengen:

**a)** $[-1; 2] \cap ]0; 4[$ **b)** $[-1; 2] \cup ]0; 4[$

**c)** $[-3; -0{,}5] \cup [-0{,}5; 3[$ **d)** $[-3; -0{,}5] \cap [-0{,}5; 3[$

**e)** $\mathbb{N} \cap [0; 6[$ **f)** $(]-5; 0[ \cup [-1; 4]) \cap \mathbb{Z}$

### 5.3.2 Kleiner- und Größer-Ungleichungen

Mit Hilfe der Äquivalenzumformungen können wir nun Ungleichungen wie z. B. $2x + 5 < 7x - 3$ lösen, wenn es uns gelingt, sie auf eine der Normalformen $x < a$ oder $x > a$ zu bringen.

**Beispiel 1:**
$$\begin{aligned} 2x + 5 &< 7x - 3 \quad && \| -2x + 3 \\ 8 &< 5x && \| :5 \\ \tfrac{8}{5} &< x \\ x &> \tfrac{8}{5} \end{aligned}$$

In der Intervallschreibweise lautet die Lösungsmenge $L = ]\frac{8}{5}; +\infty[$. Sie läßt sich auch graphisch darstellen:

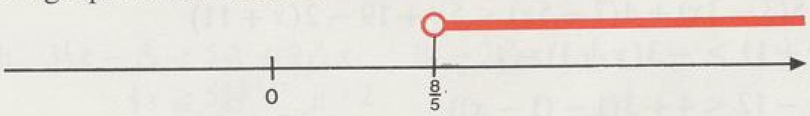



Abb. 151.1 Lösungsmenge der Ungleichung $2x + 5 < 7x - 3$

Es gibt aber auch Ungleichungen, die sich nicht auf die Normalformen $x < a$ bzw. $x > a$ bringen lassen, nämlich dann, wenn die Unbekannte bei den Äquivalenzumformungen »herausfällt«. Es bleibt in diesem Fall eine Ungleichung zwischen Zahlen übrig, also statt einer Aussageform nur eine Aussage. Ist diese wahr, dann ist die ursprüngliche Ungleichung allgemeingültig, ihre Lösungsmenge ist also $\mathbb{Q}$. Ist die übrigbleibende Zahlenungleichung eine falsche Aussage, dann ist die ursprüngliche Ungleichung widersprüchlich, ihre Lösungsmenge also $\{\,\}$. Die folgenden beiden Beispiele sollen dir das verdeutlichen.

**Beispiel 2:**
$$\begin{aligned} 2x + 5 &< 17 - (5 - 2x) \\ 2x + 5 &< 17 - 5 + 2x \\ 2x + 5 &< 12 + 2x \quad \| -2x - 5 \\ 0 &< 7; \quad \text{wahre Aussage! Also} \quad L = \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

**Beispiel 3:**
$$\begin{aligned} 2x + 5 &< 7 - (5 - 2x) \\ 2x + 5 &< 7 - 5 + 2x \\ 2x + 5 &< 2 + 2x \quad \| -2x - 5 \\ 0 &< -3; \quad \text{falsche Aussage! Also} \quad L = \{\,\}. \end{aligned}$$