Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

Aufgaben

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

Damit haben wir

Definition 150.1:

Beschreibung des Intervalls	Intervall-symbol	Art des Intervalls	Bild des Intervalls
Menge aller Zahlen links von a einschließlich a	$]-\infty; a]$	halboffen	▬▬▬● a
Menge aller Zahlen links von a ohne a	$]-\infty; a[$	offen	▬▬▬○ a
Menge aller Zahlen rechts von a einschließlich a	$[a; +\infty[$	halboffen	a ●▬▬▬
Menge aller Zahlen rechts von a ohne a	$]a; +\infty[$	offen	a ○▬▬▬

Aufgaben

1. Zeichne die Intervalle
   a) $[2; 4]$ **b)** $[-1{,}5; 5{,}6]$ **c)** $]-2; -0{,}5]$
   d) $[1{,}4; 4{,}1[$ **e)** $]0; 5[$ **f)** $[1; 1]$
2. Schreibe als Intervall
   a) 2 ●———● 3,9 **b)** −7 ●———○ 3
   c) −1 ○———● 1 **d)** −8,3 ○———○ 16,6
3. Zeichne die Intervalle
   a) $[2; +\infty[$ **b)** $]-1; +\infty[$ **c)** $]-\infty; 0]$ **d)** $]-\infty; -2[$
4. Schreibe als Intervall
   a) −5 ●——— **b)** ———● 7
   c) ———○ 100 **d)** ———○ −13
5. Schreibe als Intervall
   a) $\mathbb{Q}$ **b)** $\mathbb{Q}^+$ **c)** $\mathbb{Q}^-$ **d)** $\mathbb{Q}_0^+$ **e)** $\mathbb{Q}_0^-$ **f)** $\{\}$
6. Entscheide für jede der Zahlen -5; 20; 0; $-3{,}1$; $1{,}5$ ob sie in dem folgenden Intervall liegt oder nicht:
   a) $]-5; 1{,}5]$ **b)** $[-3; 5]$ **c)** $]-10; 20]$ **d)** $]-5{,}5; 0[$
7. Bestimme das *größte abgeschlossene* Intervall mit ganzzahligen Grenzen, das eine Teilmenge des folgenden Intervalls ist:
   a) $]0; 5[$ **b)** $]-2{,}7; 3]$ **c)** $[-2{,}7; 3[$ **d)** $[-6; -1{,}1[$ **e)** $[-1; 2]$
8. Gib zu den Intervallen der Aufgabe 7 das jeweils *kleinste offene* Intervall mit ganzzahligen Grenzen an, welches das gegebene Intervall ganz überdeckt.

9. Bestimme folgende Schnitt- bzw. Vereinigungsmengen:

a) $[-1; 2] \cap]0; 4[$ **b)** $[-1; 2] \cup]0; 4[$

c) $[-3; -0{,}5] \cup [-0{,}5; 3[$ **d)** $[-3; -0{,}5] \cap [-0{,}5; 3[$

e) $\mathbb{N} \cap [0; 6[$ **f)** $(]-5; 0[\cup [-1; 4]) \cap \mathbb{Z}$

5.3.2 Kleiner- und Größer-Ungleichungen

Mit Hilfe der Äquivalenzumformungen können wir nun Ungleichungen wie z.B. $2x + 5 < 7x - 3$ lösen, wenn es uns gelingt, sie auf eine der Normalformen $x < a$ oder $x > a$ zu bringen.

Beispiel 1:
$$2x + 5 < 7x - 3 \quad \| -2x + 3$$
$$8 < 5x \quad \| :5$$
$$\tfrac{8}{5} < x$$
$$x > \tfrac{8}{5}$$

In der Intervallschreibweise lautet die Lösungsmenge $L =]\tfrac{8}{5}; +\infty[$. Sie läßt sich auch graphisch darstellen:

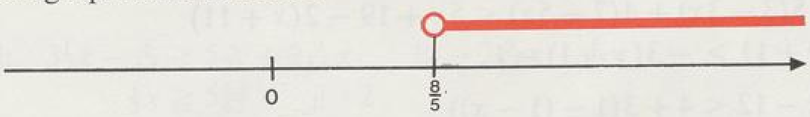

Abb. 151.1 Lösungsmenge der Ungleichung $2x + 5 < 7x - 3$

Es gibt aber auch Ungleichungen, die sich nicht auf die Normalformen $x < a$ bzw. $x > a$ bringen lassen, nämlich dann, wenn die Unbekannte bei den Äquivalenzumformungen »herausfällt«. Es bleibt in diesem Fall eine Ungleichung zwischen Zahlen übrig, also statt einer Aussageform nur eine Aussage. Ist diese wahr, dann ist die ursprüngliche Ungleichung allgemeingültig, ihre Lösungsmenge ist also $\mathbb{Q}$. Ist die übrigbleibende Zahlenungleichung eine falsche Aussage, dann ist die ursprüngliche Ungleichung widersprüchlich, ihre Lösungsmenge also $\{\,\}$. Die folgenden beiden Beispiele sollen dir das verdeutlichen.

Beispiel 2:
$$2x + 5 < 1\ \ - (5 - 2x)$$
$$2x + 5 < 17 - 5 + 2x$$
$$2x + 5 < 12 + 2x \quad \| -2x - 5$$
$$0 < 7; \quad \text{wahre Aussage! Also} \quad L = \mathbb{Q}.$$

Beispiel 3:
$$2x + 5 < 7 - (5 - 2x)$$
$$2x + 5 < 7 - 5 + 2x$$
$$2x + 5 < 2 + 2x \quad \| -2x - 5$$
$$0 < -3; \quad \text{falsche Aussage! Also} \quad L = \{\,\}.$$