Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

5.3.2 Kleiner- und Größer-Ungleichungen

9. Bestimme folgende Schnitt- bzw. Vereinigungsmengen:

a) $[-1; 2] \cap]0; 4[$ **b)** $[-1; 2] \cup]0; 4[$

c) $[-3; -0{,}5] \cup [-0{,}5; 3[$ **d)** $[-3; -0{,}5] \cap [-0{,}5; 3[$

e) $\mathbb{N} \cap [0; 6[$ **f)** $(]-5; 0[\cup [-1; 4]) \cap \mathbb{Z}$

5.3.2 Kleiner- und Größer-Ungleichungen

Mit Hilfe der Äquivalenzumformungen können wir nun Ungleichungen wie z.B. $2x + 5 < 7x - 3$ lösen, wenn es uns gelingt, sie auf eine der Normalformen $x < a$ oder $x > a$ zu bringen.

Beispiel 1:
$$\begin{aligned} 2x + 5 &< 7x - 3 \quad && \| -2x + 3 \\ 8 &< 5x && \| : 5 \\ \tfrac{8}{5} &< x \\ x &> \tfrac{8}{5} \end{aligned}$$

In der Intervallschreibweise lautet die Lösungsmenge $L =]\frac{8}{5}; +\infty[$. Sie läßt sich auch graphisch darstellen:

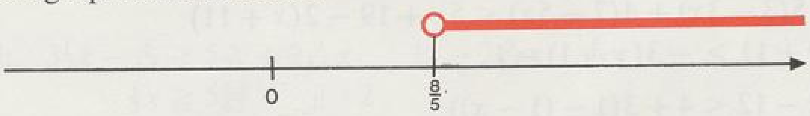

Abb. 151.1 Lösungsmenge der Ungleichung $2x + 5 < 7x - 3$

Es gibt aber auch Ungleichungen, die sich nicht auf die Normalformen $x < a$ bzw. $x > a$ bringen lassen, nämlich dann, wenn die Unbekannte bei den Äquivalenzumformungen »herausfällt«. Es bleibt in diesem Fall eine Ungleichung zwischen Zahlen übrig, also statt einer Aussageform nur eine Aussage. Ist diese wahr, dann ist die ursprüngliche Ungleichung allgemeingültig, ihre Lösungsmenge ist also $\mathbb{Q}$. Ist die übrigbleibende Zahlenungleichung eine falsche Aussage, dann ist die ursprüngliche Ungleichung widersprüchlich, ihre Lösungsmenge also $\{\}$. Die folgenden beiden Beispiele sollen dir das verdeutlichen.

Beispiel 2:
$$\begin{aligned} 2x + 5 &< 1 - (5 - 2x) \\ 2x + 5 &< 17 - 5 + 2x \\ 2x + 5 &< 12 + 2x \quad \| -2x - 5 \\ 0 &< 7; \quad \text{wahre Aussage! Also} \quad L = \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Beispiel 3:
$$\begin{aligned} 2x + 5 &< 7 - (5 - 2x) \\ 2x + 5 &< 7 - 5 + 2x \\ 2x + 5 &< 2 + 2x \quad \| -2x - 5 \\ 0 &< -3; \quad \text{falsche Aussage! Also} \quad L = \{\}. \end{aligned}$$

Aufgaben

1. **a)** $x-3<5$ **b)** $2-x>-3$ **c)** $-x<-3$
d) $3x>18$ **e)** $\frac{2}{5}x<\frac{2}{5}$ **f)** $-\frac{3}{2}x>-\frac{3}{2}$
g) $-\frac{14}{5}x<24\frac{1}{2}$ **h)** $\frac{39}{49}<2\frac{10}{21}x$ **i)** $4\frac{11}{25}<-\frac{74}{75}x$

2. Schreibe die Lösungsmenge als Intervall.
a) $3x-11<12x-10$ **b)** $5-8x<x-13$
c) $15-6y>1-20y$ **d)** $-z>z-10$

3. Stelle die Lösungsmenge graphisch dar.
a) $\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}<\frac{1}{4}x+1\frac{3}{4}$ **b)** $15\frac{3}{8}-14\frac{5}{8}x>12\frac{1}{4}x+42{,}25$
c) $0{,}8-0{,}9z>\frac{3}{7}z+\frac{4}{5}$ **d)** $0{,}3y-\frac{1}{3}<\frac{1}{3}y-3\frac{2}{3}$

4. Schreibe die Lösungsmenge als Intervall.
a) $x-(3-x)>5-(5-x)$
b) $2y+3-(5+3y)<3-(2y-1)$
c) $5\frac{1}{2}-(3\frac{2}{7}z-\frac{1}{2})>8z+(7-\frac{2}{7}z)$

5. **a)** $11z-3(-z+4)>-(z-8)+5(2z-3)$
b) $-5(3-3x)+4(7-5x)<5x+19-2(x+11)$
c) $2y+11>-3(y+1)-1$

•6. **a)** $3x-12<4+3(1-(1-x))$
b) $7\frac{1}{4}x+3(-\frac{1}{12}x+\frac{4}{9})>4\frac{1}{4}x-6(\frac{11}{24}-\frac{11}{24}x)$
c) $-11x+(17-3x)\cdot 3<7-\frac{2}{5}(50x-3\frac{4}{7})$
d) $0{,}01x-0{,}1x+x<0{,}02x-0{,}31x+1{,}2x$

5.3.3 Höchstens- und Mindestens-Ungleichungen

In öffentlichen Verkehrsmitteln können Jugendliche zu einem günstigeren Tarif fahren, wenn sie höchstens 15 Jahre alt sind. Die Verbilligung kann also jeder in Anspruch nehmen, der 15 Jahre alt ist oder der weniger als 15 Jahre alt ist. Bezeichnet man die Anzahl der Jahre kurz mit j, so gibt es Fahrpreisermäßigung, falls gilt:

$$j=15 \vee j<15.$$

Die beiden Bedingungen dieser *Oder*-Aussageform faßt man zusammen zu

$$j \leqq 15$$

und liest dies als

»j ist **höchstens** 15« oder auch »j ist kleiner oder gleich 15«.

Zu Schuljahrsbeginn bietet ein Schreibwarengeschäft 5 % Rabatt* bei Abnah-

* Vom italienischen *rabatto* = *Preisabschlag*. Erst im 17. Jh. wird unser *Rabatt* aus dem Italienischen entlehnt.