Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

5.3.3 Höchstens- und Mindestens-Ungleichungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

Aufgaben

1. **a)** $x-3<5$ **b)** $2-x>-3$ **c)** $-x<-3$
d) $3x>18$ **e)** $\frac{2}{5}x<\frac{2}{5}$ **f)** $-\frac{3}{2}x>-\frac{3}{2}$
g) $-\frac{14}{5}x<24\frac{1}{2}$ **h)** $\frac{39}{49}<2\frac{10}{21}x$ **i)** $4\frac{11}{25}<-\frac{74}{75}x$

2. Schreibe die Lösungsmenge als Intervall.
a) $3x-11<12x-10$ **b)** $5-8x<x-13$
c) $15-6y>1-20y$ **d)** $-z>z-10$

3. Stelle die Lösungsmenge graphisch dar.
a) $\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}<\frac{1}{4}x+1\frac{3}{4}$ **b)** $15\frac{3}{8}-14\frac{5}{8}x>12\frac{1}{4}x+42{,}25$
c) $0{,}8-0{,}9z>\frac{3}{7}z+\frac{4}{5}$ **d)** $0{,}3y-\frac{1}{3}<\frac{1}{3}y-3\frac{2}{3}$

4. Schreibe die Lösungsmenge als Intervall.
a) $x-(3-x)>5-(5-x)$
b) $2y+3-(5+3y)<3-(2y-1)$
c) $5\frac{1}{2}-(3\frac{2}{7}z-\frac{1}{2})>8z+(7-\frac{2}{7}z)$

5. **a)** $11z-3(-z+4)>-(z-8)+5(2z-3)$
b) $-5(3-3x)+4(7-5x)<5x+19-2(x+11)$
c) $2y+11>-3(y+1)-1$

•**6.** **a)** $3x-12<4+3(1-(1-x))$
b) $7\frac{1}{4}x+3(-\frac{1}{12}x+\frac{4}{9})>4\frac{1}{4}x-6(\frac{11}{24}-\frac{11}{24}x)$
c) $-11x+(17-3x)\cdot 3<7-\frac{2}{5}(50x-3\frac{4}{7})$
d) $0{,}01x-0{,}1x+x<0{,}02x-0{,}31x+1{,}2x$

5.3.3 Höchstens- und Mindestens-Ungleichungen

In öffentlichen Verkehrsmitteln können Jugendliche zu einem günstigeren Tarif fahren, wenn sie höchstens 15 Jahre alt sind. Die Verbilligung kann also jeder in Anspruch nehmen, der 15 Jahre alt ist oder der weniger als 15 Jahre alt ist. Bezeichnet man die Anzahl der Jahre kurz mit j, so gibt es Fahrpreisermäßigung, falls gilt:

$$j=15 \vee j<15.$$

Die beiden Bedingungen dieser *Oder*-Aussageform faßt man zusammen zu

$$j \leqq 15$$

und liest dies als

»j ist **höchstens** 15« oder auch »j ist kleiner oder gleich 15«.

Zu Schuljahrsbeginn bietet ein Schreibwarengeschäft 5% Rabatt* bei Abnah-

* Vom italienischen *rabatto* = *Preisabschlag*. Erst im 17. Jh. wird unser *Rabatt* aus dem Italienischen entlehnt.

me von mindestens 10 Heften gleicher Art an. Diesen Preisnachlaß erhält man also, wenn man 10 Hefte oder mehr als 10 Hefte kauft. Bezeichnet man die Anzahl der Hefte kurz mit h, so wird Rabatt gewährt, falls gilt:

$$h = 10 \vee h > 10.$$

Die beiden Bedingungen dieser Oder-Aussageform faßt man zusammen zu

$$h \geqq 10$$

und liest dies als

»h ist **mindestens** 10« oder auch »h ist größer oder gleich 10«.

Definition 153.1: $a \leqq b$ **bedeutet** $a < b \vee a = b$
$a \geqq b$ **bedeutet** $a > b \vee a = b$
$a \neq b$ **bedeutet** $a < b \vee a > b$

Die Zeichen $\leqq$ und $\geqq$ wurden 1734 von Pierre BOUGUER (1698–1758) erfunden.

Ungleichungen mit $\leqq$ bzw. $\geqq$ löst man genauso wie Ungleichungen mit $<$ bzw. $>$. Dazu ein

Beispiel:
$$3\tfrac{1}{7}x - \tfrac{5}{14} \geqq 5\tfrac{4}{21} + 2\tfrac{9}{14}x \quad \| -2\tfrac{9}{14}x + \tfrac{5}{14}$$
$$\tfrac{1}{2}x \geqq 5\tfrac{23}{42} \quad \| \cdot 2$$
$$x \geqq 11\tfrac{2}{21}.$$

In Intervallschreibweise lautet die Lösungsmenge $L = [11\tfrac{2}{21}; +\infty[$. Abbildung 153.1 veranschaulicht L.

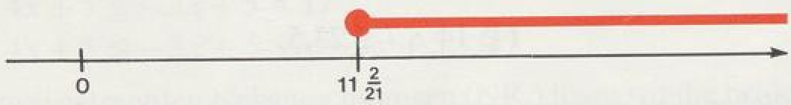

Abb. 153.1 Die Lösungsmenge $[11\tfrac{2}{21}; +\infty[$

Aufgaben

1. Löse die folgenden Ungleichungen. Veranschauliche die Lösungsmengen auf der Zahlengeraden.
   a) $x + 7 \leqq 9$ **b)** $x - 16 \leqq -17$ **c)** $x + 2{,}5 \geqq 5$
   d) $x - \tfrac{2}{3} \leqq \tfrac{7}{3}$ **e)** $x + \tfrac{3}{4} \geqq -1{,}75$ **f)** $x - 4 \neq 0$

2. Schreibe die Lösungsmenge als Intervall.
   a) $2x - 1 \leqq 1 - 2x$ **b)** $1 - x \geqq 17 - 17x$
   c) $12x - 7 \geqq 8x + 41$ **d)** $y - 19 \leqq 19y - 19$
   e) $8z - 1 \geqq 18z - 10$ **f)** $11w - 92 \leqq 108 + 11w$

3. Stelle die Lösungsmenge auf der Zahlengeraden dar.

a) $\frac{7}{4}x - \frac{1}{2} \leqq 3\frac{1}{2} - \frac{9}{4}x$ **b)** $18\frac{1}{3} - 7\frac{1}{2}x \leqq 3\frac{1}{4}x + 7\frac{7}{12}$

c) $0{,}01y - 12{,}7 \geqq 3{,}3 - 0{,}1y$ **d)** $\frac{3}{2}z + \frac{3}{2} \leqq \frac{3}{2} - \frac{3}{7}z$

• **4.** Schreibe die Lösungsmenge als Intervall.

a) $3x - (1 - 2x) \leqq -2(x-1) + 7$

b) $3\frac{1}{4} - 2\frac{1}{7}(\frac{1}{3}x - 3\frac{3}{4}) \geqq 2\frac{1}{2}x(1\frac{1}{2} - 0{,}75) + (2\frac{1}{8} + \frac{1}{4}x)$

• **5.** **a)** $2{,}1x + 2{,}1(0{,}1x - 2{,}1(1 - 0{,}01x)) \leqq 2{,}1 - 2{,}1((1-2x) + 2{,}1)$

b) $\frac{1}{2}(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}x) - \frac{1}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}x) \geqq \frac{1}{5}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x)$

5.3.4 Doppelungleichungen

Die Deutsche Bundespost erkennt Sendungen nur dann als Briefe an, wenn sie gewisse Mindest- und Höchstmaße erfüllen. So muß z. B. die Länge mindestens 14 cm und darf höchstens 23,5 cm betragen. Bezeichnet man kurz mit l die Länge in cm, so muß für einen Brief gelten:

$$l \geqq 14 \quad \text{und} \quad l \leqq 23{,}5\,.$$

Eine Länge ist Lösung dieser *Und*-Aussageform, wenn beim Einsetzen eine wahre Und-Aussage entsteht. Eine **Und-Aussage** in der Mathematik ist eine Verknüpfung zweier Aussagen durch das Wort *und*, das man symbolisch durch $\wedge$ wiedergibt. Eine Und-Aussage ist genau dann wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind.

Die obigen Bedingungen für die Länge lassen sich mit dem $\wedge$-Symbol kurz schreiben:

$$l \geqq 14 \wedge l \leqq 23{,}5\,.$$

Übersichtlicher wird es, wenn man nur Ungleichheitszeichen derselben Richtung verwendet, also

$$14 \leqq l \wedge l \leqq 23{,}5 \quad \text{oder auch} \quad l \geqq 14 \wedge 23{,}5 \geqq l$$

schreibt. Stimmen dann die rechte Seite der ersten und die linke Seite der zweiten Ungleichung überein, so kann man beide Ungleichungen zu einer **Doppelungleichung** zusammenfassen. Statt $14 \leqq l \wedge l \leqq 23{,}5$ schreibt man kurz

$$14 \leqq l \leqq 23{,}5\,.$$

Bei der Notierung $l \geqq 14 \wedge 23{,}5 \geqq l$ läßt sich unsere Regel nicht anwenden! Weil die Reihenfolge der Bedingungen in einer Und-Verknüpfung aber keine Rolle spielt, so kann man sie auch in der Form $23{,}5 \geqq l \wedge l \geqq 14$ schreiben, was sich nun zu $23{,}5 \geqq l \geqq 14$ zusammenfassen läßt. – Wir merken uns