Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

5.3.5 Ungleichungen mit Absolutbeträgen

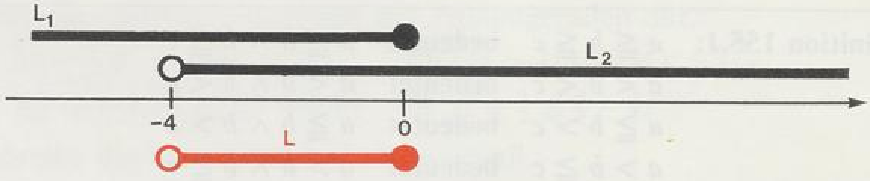

Abb. 156.1 $L = L_1 \cap L_2$

Aufgaben

1. Schreibe als Doppelungleichung und gib die Lösungsmenge als Intervall an.
   a) $x > -1 \wedge x \leqq 5$ **b)** $x \leqq 0 \wedge x \geqq -3{,}5$
   c) $x \leqq -7 \wedge x > -10$ **d)** $15 < x \wedge 22 > x$

2. Bestimme die Lösungsmenge als Intervall und stelle sie auf der Zahlengeraden dar.
   a) $0 \leqq 2x - 1 \leqq 1$ **b)** $0 < 1 - \frac{3}{4}x < 2$ **c)** $84 > 7(5 - \frac{2}{3}x) \geqq -153$

3. Bestimme die Lösungsmenge als Intervall.
   a) $0 < x \leqq 1 - x$ **b)** $2x \leqq 1 \leqq 3x$ **c)** $3x < 1 < 2x$

4. **a)** $2x - 1 < 3x - 1 \leqq 1 - x$
   • **b)** $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4} < \frac{5}{4}x - \frac{1}{2} < -\frac{5}{6}x + \frac{3}{4}$
   • **c)** $0{,}1(0{,}1 - 2x) \geqq 1{,}01x - 0{,}5(2x - 0{,}3) > -0{,}7x - 1{,}27$

5. **a)** In einer Doppelungleichung verbirgt sich neben den beiden Teilungleichungen der Und-Aussage noch eine weitere Ungleichung; sie entsteht, wenn man das Mittelstück und ein Ungleichheitszeichen wegnimmt. Wie heißen die drei Ungleichungen, die man aus $-3 < x < 1$ erhält?
   b) Hans baut die Und-Aussageform $3 < x \wedge x > -10$ zu einer »Doppelungleichung« der Art $-3 < x > -10$ zusammen.
   Sabine zeigt ihm, daß sich dann beim Vorgehen nach **a)** ein Widerspruch ergibt. Welcher?
   Trotzdem hat die Und-Aussageform $-3 < x \wedge x > -10$ eine Lösungsmenge. Gib sie als Intervall an.

5.3.5 Ungleichungen mit Absolutbeträgen

In Gleichungen und in Ungleichungen kann auch der Betrag der Unbekannten auftreten. Die einfachste solche Gleichung ist von der Art $|x| = 4$, die einfachsten Ungleichungen sind von der Art $|x| < 4$ bzw. $|x| > 4$.
Die Lösung ist ganz einfach, wenn wir uns an die Definition des Betrags (Definition 43.1) erinnern: $|x|$ ist die Entfernung des Punkts x vom Nullpunkt auf der Zahlengeraden.

Die Information $|x| = 4$ teilt uns mit, daß die Zahl x bzw. der zugehörige Punkt auf der Zahlengeraden 4 Einheiten vom Nullpunkt entfernt ist. Diese Information ist nicht eindeutig, weil sie auf die beiden Zahlen 4 und -4 zutrifft. Also gilt:

$|x| = 4 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -4.$

Die Lösungsmenge ist $L = \{-4; 4\}$.

Abb. 157.1 Die Lösungsmenge von $|x| = 4$

Durch die Information $|x| < 4$ wird uns mitgeteilt, daß die Zahl x weniger als 4 Einheiten vom Nullpunkt entfernt liegt. Alle Zahlen zwischen -4 und 4 erfüllen diese Bedingung. Also gilt:

$|x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4.$

Die Lösungsmenge ist $L =]-4; 4[$.

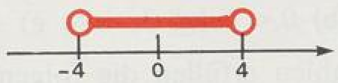

Abb. 157.2 Die Lösungsmenge von $|x| < 4$

Durch die Information $|x| > 4$ wird uns mitgeteilt, daß die Zahl x mehr als 4 Einheiten vom Nullpunkt entfernt liegt. Alle Zahlen links von -4 oder rechts von 4 erfüllen diese Bedingung. Also gilt:

$|x| > 4 \Leftrightarrow x < -4 \vee x > 4.$

Die Lösungsmenge ist $L =]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[$.

Mit Hilfe des Ohne-Symbols $\setminus$ läßt sich L statt als Vereinigungsmenge auch als Restmenge schreiben, nämlich zu $L = \mathbb{Q} \setminus [-4; 4]$. Eine solche Schreibweise kann gelegentlich übersichtlicher sein.

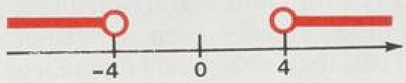

Abb. 157.3 Die Lösungsmenge von $|x| > 4$

Man kann also die angegebenen einfachen Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen auf betragsfreie Formen äquivalent umschreiben.

Wir merken uns

Satz 158.1: **Für $a > 0$ gilt**

$$|x| = a \Leftrightarrow x = -a \vee x = a$$
$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$
$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a.$$

Aufgaben

1. Welche Zahlen erfüllen die Gleichung?
a) $|x| = 4{,}5$ **b)** $|x| = 1986$ **c)** $|x| = 0{,}1$
d) $|x| = 0$ **e)** $|x| = -\frac{2}{3}$ **f)** $|x| = |3{,}7 - 5{,}9|$

2. Gib die Lösungsmenge der Ungleichung an und stelle sie auf der Zahlengeraden dar.
a) $|x| < 1$ **b)** $|x| \leqq 4{,}5$ **c)** $|x| > -2$ **d)** $|x| \leqq -4$
e) $|x| \geqq 3{,}6$ **f)** $|x| > 3\frac{1}{7}$ **g)** $|x| \leqq 3{,}14$ **h)** $\frac{8}{9} \leqq |x|$

3. Stelle die Lösungsmenge auf der Zahlengeraden dar.
a) $2 \leqq |x| \leqq 4$ **b)** $0 < |x| \leqq 3$ **c)** $4 > |x| > 1$

4. Welche rationalen Zahlen erfüllen die folgenden UND-Bedingungen? Stelle dazu die Lösungsmengen der Teilbedingungen und die der Gesamtbedingung auf der Zahlengeraden dar.
a) $|x| > 1$ und $|x| \leqq 5$ **b)** $|x| \leqq 1$ und $|x| > 0{,}5$
c) $x < 0{,}3$ und $|x| > 3{,}5$ **d)** $-2{,}75 \leqq |x|$ und $x \geqq -1{,}5$
e) $x > -1$ und $|x| \leqq 4$ **f)** $|x| < 6$ und $x < -2$

Zu Seite 159:

Uno lione mangia una chapra in 2 dì et uno lupo la mangia in 3 dì et una gholpe la mangia in 5 dì: vo' sapere in quanto tempo tuttj questj animalj insieme mangereb[o]no detta capra: fa' così togli uno numero che abbi $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$ torraj 30 poi diraj el $\frac{1}{2}$ di 30 è 15 el $\frac{1}{3}$ è 10 e'l $\frac{1}{5}$ è 6 racogli fa 31 e questo è 'l partitore; poi partj 30 per 31, ne viene $\frac{30}{31}$ di dì et in tanto tempo la mangerebono.

Ein Löwe frißt eine Ziege in 2 Tagen, und ein Wolf frißt sie in 3 Tagen, und ein Fuchs frißt sie in 5 Tagen. Du willst wissen, in welcher Zeit all diese Tiere gemeinsam diese Ziege fräßen. Mach es wie folgt. Nimm eine Zahl, die $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$ hat, nimm 30; dann sage: $\frac{1}{2}$ von 30 ist 15, $\frac{1}{3}$ ist 10 und $\frac{1}{5}$ ist 6. Zähle zusammen, das ergibt 31, und das ist der Teiler. Teile dann 30 durch 31, daraus erhält man $\frac{30}{31}$ des Tages, und in dieser Zeit fräßen sie sie.