Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

6.1 Wie löst man Textaufgaben?

6 Textaufgaben

6.1 Wie löst man Textaufgaben?

Abb. 160.1 Babylonische Tontafel mit Keilschriftzahlen, um 1800 v. Chr. – 13 cm × 9 cm.

Algebra ist entstanden aus Aufgaben und Problemen des Alltags, wie uns über 4000 Jahre alte babylonische Keilschrifttexte auf Tontäfelchen und fast ebenso alte ägyptische Papyrusrollen zeigen. Sicherlich erinnerst du dich noch an die einfachen Aufgaben aus dem *Papyrus Rhind* (Seite 119ff.), die dadurch gelöst werden konnten, daß man der gesuchten, aber noch unbekannten Größe einen besonderen Namen gab. Die Algebra war geboren!
Immer mehr setzten sich allmählich Buchstaben als Abkürzungen für solche Namen durch; für die Rechenoperationen wurden vor rund 500 Jahren Zeichen wie + und − usw. erfunden, und schließlich lehrte François Viète (1540–1603), wie man mit diesen Buchstaben und Zeichen umgehen mußte. Es entstand die Neue Algebra, nämlich eine formale »Sprache« mit Buchstaben, aus der die Probleme des Alltags verschwunden waren.
Aber das Leben geht weiter, Wirtschaft, Technik und Wissenschaft und auch der Alltag liefern stets neue Probleme, die gelöst werden müssen. Formuliert sind sie aber fast immer in der Umgangssprache. Sie heißen daher **Textaufgaben**.
Nun hat François Viète stolz behauptet, mit seiner *Algebra nova* könne man

»jedes Problem lösen«.

Wenn wir also Textaufgaben algebraisch lösen wollen, dann müssen wir sie zuerst aus der Umgangssprache in die Sprache der Algebra übersetzen, die du in den letzten Kapiteln gelernt hast.
Bei einer solchen Übersetzung kann ein *Schema** hilfreich sein. Die folgenden Beispiele sollen dir zeigen, wie man mit seiner Hilfe eine Textaufgabe lösen kann.
Da die Aufgaben des *Papyrus Rhind* zu einfach sind, die des al-Charizmi aber viel zu schwer – er hat ja sein Buch für Testamentsvollstrecker, Kaufleute, Landvermesser und Bankhalter geschrieben –, haben wir als erstes eine Aufgabe aus der 1522 erschienenen *Rechenung auff der linihen vnd federn* des Adam Ries (1492–1559) in der Fassung von 1574 ausgewählt, um dir das Schema vorzuführen.

* σχῆμα (griech.) gesprochen s|chema, hat viele Bedeutungen, u.a. auch *Gestalt, Figur, Form.*

Adam Risen
Rechenbuch/ auff Linien vnd Ziphren/ in allerley Hand thierung / Geschäfften vnnd Kauffmanschafft. Mit neuwen künstlichen Regeln vnd Exempeln gemehret/ Innhalt fürgestellten Registers.
Visier vnd Wechselruthen künstlich vnd gerecht zumachen/ auß dem Quadrat/ Durch die Arithmetic vnnd Geometri / von Erhart Helm/ Mathematico zu Franckfurt/ beschrieben.
Alles von neuwem jetzunde widerumb ersehen vnd Corrigirt.
Franck. Bey. Chr. Egen. Erben. 1574.

Abb. 161.1 Titelblatt vom *Rechenbuch auff Linien und Ziphren* (1574) von Adam Ries

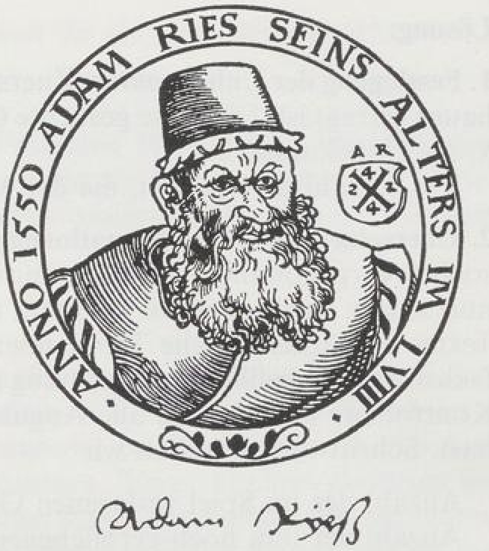

Abb. 161.2 Adam Ries (1492 Staffelstein–30.3./1.4.(?) 1559 Annaberg) als 58jähriger. Holzschnitt vom Titelblatt der *Rechenung nach der lenge, auff den Linihen vnd Feder* (1550). – Adam Ries war Rechenmeister, d. h., er gehörte zu denjenigen, die mit den in arabischen Ziffern geschriebenen Zahlen auch rechnen konnten. In Annaberg führte er das Rechenwesen des Erzbergbaus und leitete eine Rechenschule. Seine Lehrbücher und damit seine Methoden fanden eine so große Verbreitung, daß schließlich die Redensart »nach Adam Riese« entstand.

Beispiel 1:

Item / einer hat gelt / verspilt daruon $\frac{1}{3}$. verzehrt vom vbrigen 4. fl. mit dem andern handelt er / verleuret ein viertheil/ vnd behelt 20. fl. wie viel hat er zum ersten außgeführet?

Im heutigen Deutsch liest sich die Aufgabe etwa so:

Einer hat Geld, verspielt davon $\frac{1}{3}$. Von dem, was ihm übriggeblieben ist, verbraucht er 4 Gulden*. Mit dem Rest handelt er und verliert ein Viertel. Es bleiben ihm 20 Gulden. Wieviel Gulden hat er anfänglich besessen?

* = goldene Münze. 1252 begann Florenz mit der Prägung einer solchen Münze, die *floren* und auf französisch *florin* hieß. Daher wurde der Gulden mit fl. abgekürzt.

Lösung:

1. Festlegung der Unbekannten: Zuerst mußt du dir klarwerden, wonach überhaupt gefragt ist. Für diese gesuchte Größe führst du einen Buchstaben, meist x, als Unbekannte ein:

x = Anzahl der Gulden, die der Mann anfänglich besessen hat.

2. Übersetzen der Textinformationen und Aufstellen der Gleichung: Durch die soeben vorgenommene Bezeichnung der unbekannten Größe mit x kannst du nun so tun, als wäre sie dir bekannt. Damit kannst du alle Informationen des Textes in mathematische Terme übersetzen, die du am besten gleich vereinfachst, und schließlich die Gleichung als Bedingung für diese Terme aufstellen. Kontrolliere aber, ob du alle Angaben des Textes auch wirklich verwendet hast. Schrittweise erhalten wir

Anzahl der im Spiel verlorenen Gulden $= \frac{1}{3}x$
Anzahl der ihm noch verbliebenen Gulden $= x - \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}x$
Anzahl der Gulden, mit denen er handelt $= \frac{2}{3}x - 4$
Anzahl der Gulden, die er beim Handel verliert $= \frac{1}{4}(\frac{2}{3}x - 4)$
Anzahl der Gulden, die ihm noch bleiben $= \frac{3}{4}(\frac{2}{3}x - 4) = \frac{1}{2}x - 3$

Mit der letzten verbliebenen Information können wir nun die Bestimmungsgleichung aufstellen:

$$\tfrac{1}{2}x - 3 = 20\,.$$

3. Auflösung der Gleichung: Wende auf die gefundene Gleichung die Methoden an, die du gelernt hast, um die Lösungsmenge der Gleichung zu ermitteln.

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x - 3 &= 20 \\ \tfrac{1}{2}x &= 23 \\ x &= 46, \quad \text{also} \quad L = \{46\}\,. \end{aligned}$$

4. Antwort: Das mathematische Ergebnis wird nun in die Alltagssprache übersetzt und damit die Antwort auf die im Text gestellte Frage gegeben.

»Der Mann besaß anfänglich 46 Gulden.«

5. Textprobe: Es geht jetzt nicht darum zu prüfen, ob du die in **2** aufgestellte Gleichung richtig gelöst hast, sondern darum, ob die gefundenen Lösungszahlen alle Bedingungen des Textes erfüllen. Du mußt also eine Textprobe durchführen. Geht sie schief, dann hast du dich entweder verrechnet, oder du hast den Aufgabentext falsch übersetzt. Meist macht man die Textprobe nur mündlich. Wir schreiben sie ausnahmsweise hin.

Anfänglicher Besitz = 46 fl.
Verlust beim Spiel $= \frac{1}{3}$ von 46 fl. $= 15\frac{1}{3}$ fl.
Rest = 46 fl. $- 15\frac{1}{3}$ fl. $= 30\frac{2}{3}$ fl.
Kapital, mit dem er handelt $= 30\frac{2}{3}$ fl. $-$ 4 fl. $= 26\frac{2}{3}$ fl.
Verlust beim Handel $= \frac{1}{4}$ von $26\frac{2}{3}$ fl. $= \frac{1}{4} \cdot \frac{80}{3}$ fl. $= \frac{20}{3}$ fl. $= 6\frac{2}{3}$ fl.
Es verbleiben ihm $26\frac{2}{3}$ fl. $- 6\frac{2}{3}$ fl. = 20 fl. – Stimmt!

Eine weitere Aufgabe zum Einüben bietet dir ein altes Testament*.

Beispiel 2:
Ein Mann hinterläßt seinen 3 besten Freunden 300 Gulden. Im Testament bestimmt er, daß Anton um 40 Gulden mehr als Hans erhalten soll; Ulrich aber soll halb soviel wie die beiden anderen zusammen bekommen. Wie viele Gulden entfallen auf jeden?

Lösung:

1. Festlegung der Unbekannten: Gefragt ist hier nach den Anzahlen der Gulden, die jeder einzelne erhält. Das sind eigentlich 3 Unbekannte. Da aber auf Grund des Textes ein gewisser Zusammenhang zwischen diesen besteht, hoffen wir, mit einer Unbekannten auszukommen. Wegen der komplizierten Bedingung für Ulrich eignen sich seine Gulden wohl nicht recht dafür. Wir könnten uns aber mit gleich guten Gründen für den Anteil von Anton oder für den von Hans entscheiden. Daher führen wir dir beide Möglichkeiten vor.

x = Anzahl der Gulden, die Anton erhält	y = Anzahl der Gulden, die Hans erhält

2. Übersetzen der Textinformationen und Aufstellung der Gleichung: Nun drükken wir die Anteile, die auf die beiden anderen entfallen, durch die gewählte Unbekannte aus:

Anzahl der Gulden, die Hans erhält $= x - 40$	Anzahl der Gulden, die Anton erhält $= y + 40$
Anzahl der Gulden, die Ulrich erhält $= \frac{1}{2}[x + (x - 40)] = x - 20$	Anzahl der Gulden, die Ulrich erhält $= \frac{1}{2}[y + (y + 40)] = y + 20$

Da wir nun die 3 Anzahlen als Terme in x bzw. y kennen, können wir mit Hilfe der übriggebliebenen Information über die Höhe der Erbschaft die Bestimmungsgleichung aufstellen:

$x + (x - 40) + (x - 20) = 300$	$(y + 40) + y + (y + 20) = 300$

3. Auflösung der Gleichung:

$x + (x - 40) + (x - 20) = 300$	$(y + 40) + y + (y + 20) = 300$
$x + x - 40 + x - 20 = 300$	$y + 40 + y + y + 20 = 300$
$3x - 60 = 300$	$3y + 60 = 300$
$3x = 360$	$3y = 240$
$x = 120$	$y = 80$
also $L = \{120\}$.	also $L = \{80\}$.

* testamentum (lat.) = der letzte Wille

4. Antwort:

Anton erhält 120 Gulden,
Hans erhält (120 − 40) Gulden =
= 80 Gulden,
Ulrich erhält $\frac{1}{2}[120 + (120 - 40)]$
Gulden = 100 Gulden.

Hans erhält 80 Gulden,
Anton erhält (80 + 40) Gulden =
= 120 Gulden,
Ulrich erhält $\frac{1}{2}[80 + (80 + 40)]$
Gulden = 100 Gulden.

5. Textprobe: Die 120 Gulden von Anton sind tatsächlich um 40 mehr als die 80, die Hans erhält. Zusammen erhalten sie 200; die Hälfte davon ist 100. Und unsere Rechnung hat dem Ulrich 100 Gulden zugeteilt. Dadurch haben sie zusammen (120 + 80 + 100) Gulden = 300 Gulden, was die ganze Erbschaft ausmacht. – Stimmt!

Aufgaben

1. Ein Onkel vermacht seinen beiden Neffen ein Vermögen von 12400 DM. Wieviel erhält jeder, wenn der ältere Neffe laut Testament für sein Studium 3500 DM mehr bekommen soll als der jüngere?
2. Ein Vermögen von 14000 DM soll an die drei erbberechtigten Kinder in folgender Weise verteilt werden: Der Sohn erhält zum Ausgleich für die Kosten seiner Ausbildung 3000 DM weniger als die jüngere Tochter, die ältere Tochter als Entschädigung für ihre Mithilfe im Haushalt 2000 DM mehr als diese.
3. Eine Erbschaft von 19500 DM soll unter drei Erben A, B, C so verteilt werden, daß B um 1500 DM mehr als A und C um 3500 DM weniger als A und B zusammen erhält.
4. Die Zahl 100 ist in 4 Summanden aufzuteilen. Der 2. Summand soll die Hälfte, der 3. ein Drittel, der 4. ein Viertel des ersten Summanden sein. Wie heißen die vier Summanden?
5. Die Zahl 1000 soll so in vier Summanden zerlegt werden, daß der zweite doppelt, der dritte dreimal und der vierte viermal so groß ist wie der erste.
6. Eine alte chinesische Aufgabe: In einem Stall sind Kaninchen und Fasanen; sie haben zusammen 35 Köpfe und 98 Füße. Wieviel Tiere jeder Art waren es?
7. In einer Garage stehen Personenkraftwagen, Motorräder und Fahrräder. Die Gesamtzahl der Fahrzeuge beträgt 30, die der Kraftfahrzeuge 20. Die Fahrzeuge stehen auf insgesamt 86 Rädern. Wie viele Fahrzeuge jeder Art sind hinterstellt?

•8. Ein aus 12 Wagen und einer Lokomotive bestehender Personenzug ist aus zweiachsigen Güterwagen und dreiachsigen Personenwagen zusammengestellt. Die elektrische Lokomotive läuft auf vier Achsen. Aus wieviel Personen- und Güterwagen besteht der Zug, wenn er einschließlich Lokomotive auf insgesamt 72 Rädern läuft?

9. Eine Weinlieferung im Wert von 675 DM besteht aus drei Sorten. Eine Flasche der besten Qualität kostet 13,5 DM, eine von der mittleren Qualität 10,5 DM und eine der billigen Sorte 6 DM. Von der mittleren Sorte sind es zweimal und von der teuren Sorte dreimal soviel Flaschen wie von der billigen Preisklasse. Wieviel Flaschen wurden von jeder Sorte geliefert?

: 10. Bei einer Kinovorstellung betrug die Gesamteinnahme 1718 DM. Für den dritten Platz wurden 83, für den zweiten 106 und für den ersten 34 Eintrittskarten gelöst. Der Eintrittspreis für den 2. Platz war um 1,5 DM höher als der für den 3. Platz, während der Preis für den 1. Platz $\frac{5}{3}$ desjenigen für den 2. ausmachte. Wie teuer waren die einzelnen Plätze?

• 11. Aus dem *Chiu Chang Suan Shu*: Ein Mann hat Reis bei sich. Er geht durch 3 Zollschranken hindurch. An der äußeren Zollschranke wird ihm $\frac{1}{3}$ weggenommen, an der mittleren Schranke wird ihm vom Verbliebenen der fünfte Teil weggenommen, an der inneren Zollschranke wird ihm $\frac{1}{7}$ von dem weggenommen, was er noch bei sich hatte. Es blieben ihm 5 Tou. Wie viele Tou hatte er am Anfang? (1 Tou $\approx 0{,}2\,\text{dm}^3$)

: 12. Von dem armenischen Astronomen und Mathematiker ANANIA SCHIRAKAZI (= ANANIA VON SCHIRAK, † um 670) stammt die Aufgabe:
Ein Mann trat in eine Kirche und bat Gott: Gib mir soviel, wie ich habe, dann gebe ich Dir 25 Dahekan. Dasselbe tat er dann in einer anderen Kirche und schließlich noch in einer dritten. Übrig blieb ihm nichts. Wie viele Dahekan* hatte er anfangs?

⁝ 13. Aus dem *Liber abbaci* (1202) des LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240): *De illo qui intravit in viridario pro pomis colligendis***: Jemand ging in einen Obstgarten, in dem 7 Tore waren; er bekam dort eine bestimmte Anzahl Äpfel. Als er herausgehen wollte, mußte er dem ersten Wächter die Hälfte aller Äpfel geben und einen mehr, dem zweiten Wächter die Hälfte der restlichen Äpfel und einen mehr. Als er so auch den anderen 5 Wächtern gegeben hatte, hatte er nur noch 1 Apfel. Wie viele Äpfel hatte er bekommen?

Abb. 165.1 Apfelgarten mit drei Torwächtern. Aus einem Manuskript des italienischen Mathematikers, Astronomen, Astrologen und Dichters Paolo DAGOMARI (um 1281 – zwischen 1365 und 1372).

* Dahekan ist ein Gewichtsmaß; 1 Dahekan entspricht 4,72 g. Zugleich bedeutet es auch eine Goldmünze von diesem Gewicht.

** Von jenem, der in den Obstgarten ging, um Äpfel zu holen. – Die älteste Aufgabe dieses Typs stammt aus dem *Chiu Chang Suan Shu*.

14. *Aufgabe 26* der *propositiones ad acuendos iuvenes* des ALKUIN (735 bis 804): *De cursu canis ac fuga leporis**: Ein Hund sieht in einer Entfernung von 150 Fuß einen Hasen und jagt ihn. Der Hase springt 7 Fuß, der Hund 9 Fuß weit. Nach wie vielen Sprüngen hat der Hund den Hasen erjagt?

•**15.** Vom Leben des großen griechischen Mathematikers DIOPHANT (*Διόφαντος*), den manche Vater der Algebra nennen, weil er die Lehre von den Zahlen und Gleichungen von der Geometrie abtrennte, wissen wir nichts. Vermutlich hat er um 250 n. Chr. in Alexandria gelebt. Seine angebliche Grabinschrift ist aber in der *Anthologia Palatina*, einer Sammlung griechischer Epigramme, überliefert.

»Hier dies Grabmal deckt Diophantos – ein Wunder zu schauen!
Durch arithmetische Kunst lehret sein Alter der Stein.
Knabe zu sein gewährt ein Sechstel des Lebens der Gott ihm,
Als dann ein Zwölftel dahin, ließ er ihm sprossen die Wang';
Noch ein Siebtel, da steckt' er ihm an die Fackel der Hochzeit,
Und fünf Jahre darauf teilt' er ein Söhnlein ihm zu.
Weh! unglückliches Kind! Halb hatt' es das Alter des Vaters
Erst erreicht, da nahm's Hades, der schaurige, auf.
Noch vier Jahre ertrug er den Schmerz, der Wissenschaft lebend,
Und nun sage das Ziel, welches er selber erreicht.«

Wie alt wurde DIOPHANT? Beachte, daß »das Alter des Vaters« in Zeile 7 auf zwei Arten verstanden werden kann. Einerseits kann damit das von DIOPHANT wirklich erreichte Lebensalter gemeint sein, andererseits könnte es aber auch das Alter sein, das DIOPHANT beim Tode seines Sohnes hatte. Welche der beiden Lösungen scheint dir auf Grund der 4. Zeile des Epigramms die richtige zu sein?

6.2 Wichtige Typen von Textaufgaben

Textaufgaben können sehr verschiedenartig aussehen. Trotzdem kann man bei näherer Betrachtung gewisse Typen ausmachen, die in verschiedener Einkleidung immer wieder auftauchen. Wenn du erkannt hast, daß eine vorgelegte Textaufgabe zu einem bekannten Typ gehört, dann fällt dir meist die Lösung leichter. Einige wichtige Typen stellen wir im Folgenden vor.

* Vom Lauf des Hundes und der Flucht des Hasen. – Ähnliche Aufgaben findet man bereits im *Chiu Chang Suan Shu*, aus dem überhaupt die ältesten Bewegungsaufgaben stammen.
Die *Aufgaben, die Jugend scharfsinniger zu machen*, werden dem angelsächsischen Gelehrten ALKUIN (= Freund des Tempels) (um 712 York – 19. 5. 804 Tours) zugeschrieben. ALKUIN war Freund und Lehrer Kaiser Karls des Großen. Er übte erheblichen Einfluß auf das geistige Leben seiner Zeit aus.