Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

6.2 Wichtige Typen von Textaufgaben

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

14. *Aufgabe 26* der *propositiones ad acuendos iuvenes* des ALKUIN (735 bis 804): *De cursu canis ac fuga leporis**: Ein Hund sieht in einer Entfernung von 150 Fuß einen Hasen und jagt ihn. Der Hase springt 7 Fuß, der Hund 9 Fuß weit. Nach wie vielen Sprüngen hat der Hund den Hasen erjagt?

• **15.** Vom Leben des großen griechischen Mathematikers DIOPHANT (*Διόφαντος*), den manche Vater der Algebra nennen, weil er die Lehre von den Zahlen und Gleichungen von der Geometrie abtrennte, wissen wir nichts. Vermutlich hat er um 250 n. Chr. in Alexandria gelebt. Seine angebliche Grabinschrift ist aber in der *Anthologia Palatina*, einer Sammlung griechischer Epigramme, überliefert.

»Hier dies Grabmal deckt Diophantos – ein Wunder zu schauen!
Durch arithmetische Kunst lehret sein Alter der Stein.
Knabe zu sein gewährt ein Sechstel des Lebens der Gott ihm,
Als dann ein Zwölftel dahin, ließ er ihm sprossen die Wang';
Noch ein Siebtel, da steckt' er ihm an die Fackel der Hochzeit,
Und fünf Jahre darauf teilt' er ein Söhnlein ihm zu.
Weh! unglückliches Kind! Halb hatt' es das Alter des Vaters
Erst erreicht, da nahm's Hades, der schaurige, auf.
Noch vier Jahre ertrug er den Schmerz, der Wissenschaft lebend,
Und nun sage das Ziel, welches er selber erreicht.«

Wie alt wurde DIOPHANT? Beachte, daß »das Alter des Vaters« in Zeile 7 auf zwei Arten verstanden werden kann. Einerseits kann damit das von DIOPHANT wirklich erreichte Lebensalter gemeint sein, andererseits könnte es aber auch das Alter sein, das DIOPHANT beim Tode seines Sohnes hatte. Welche der beiden Lösungen scheint dir auf Grund der 4. Zeile des Epigramms die richtige zu sein?

6.2 Wichtige Typen von Textaufgaben

Textaufgaben können sehr verschiedenartig aussehen. Trotzdem kann man bei näherer Betrachtung gewisse Typen ausmachen, die in verschiedener Einkleidung immer wieder auftauchen. Wenn du erkannt hast, daß eine vorgelegte Textaufgabe zu einem bekannten Typ gehört, dann fällt dir meist die Lösung leichter. Einige wichtige Typen stellen wir im Folgenden vor.

* Vom Lauf des Hundes und der Flucht des Hasen. – Ähnliche Aufgaben findet man bereits im *Chiu Chang Suan Shu*, aus dem überhaupt die ältesten Bewegungsaufgaben stammen.
Die *Aufgaben, die Jugend scharfsinniger zu machen*, werden dem angelsächsischen Gelehrten ALKUIN (= Freund des Tempels) (um 712 York – 19.5.804 Tours) zugeschrieben. ALKUIN war Freund und Lehrer Kaiser Karls des Großen. Er übte erheblichen Einfluß auf das geistige Leben seiner Zeit aus.

6.2.1 Bestimmung von Zahlen

Beispiel:

Eine dreiziffrige Zahl hat die Quersumme 13. Ihre Einerziffer ist doppelt so groß wie ihre Hunderterziffer. Vertauscht man Einer- und Zehnerziffer miteinander, dann erhält man eine um 27 kleinere Zahl. Wie hieß die ursprüngliche Zahl?

Lösung:

1. x = Hunderterziffer

2. Einerziffer $= 2x$

Zehnerziffer $= 13 - x - 2x = 13 - 3x$

$$\begin{aligned}\text{Wert der Zahl} &= x \cdot 100 + (13 - 3x) \cdot 10 + (2x) \cdot 1 = \\ &= 100x + 130 - 30x + 2x = \\ &= 72x + 130\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Wert der veränderten Zahl} &= x \cdot 100 + (2x) \cdot 10 + (13 - 3x) \cdot 1 = \\ &= 117x + 13\end{aligned}$$

Bestimmungsgleichung: $72x + 130 - 27 = 117x + 13$

3.
$$\begin{aligned}72x + 103 &= 117x + 13\\ 90 &= 45x\\ x &= 2.\end{aligned}$$

4. Die ursprüngliche Zahl hat die Hunderterziffer 2, die Einerziffer $2 \cdot 2 = 4$ und die Zehnerziffer $13 - 3 \cdot 2 = 7$. Also heißt sie 274.

Beachte: Eine Zahl mit der Einerziffer a, der Zehnerziffer b und der Hunderterziffer c hat den Wert $100c + 10b + a$ und die Quersumme $c + b + a$.

Aufgaben

•**1.** Aus dem *Schlüssel zur Arithmetik* von AL-KASCHI († 1429 in Samarkand): Verdoppelt man eine Zahl und addiert die Eins dazu, multipliziert man dann die Summe mit 3 und gibt 2 dazu, multipliziert man dann das Erhaltene mit 4 und addiert 3, dann hat man 45. Wie heißt die Zahl?

2. Vermehrt man eine Zahl um 16, so erhält man um 2 weniger als ihr Dreifaches. Wie heißt sie?

3. Vergrößert man eine Zahl um 5, zieht vom Doppelten dieser Summe 4 ab und teilt dann das Ergebnis durch 5, so erhält man 4. Welche Zahl ist es?

4. Welche Zahl hat folgende Eigenschaft: zieht man 9 von ihr ab und addiert zur Hälfte dieser Differenz 5, so erhält man wieder die ursprüngliche Zahl?

5. Aus *Daheim* (1884):

Eine Zahl hab' ich gewählt,	jetzt mit 3 multipliziert,
90 noch hinzugezählt,	84 subtrahiert,
drauf durch 18 dividiert,	und als Rest ist mir geblieben
wieder 18 dann addiert,	dann zuletzt die heilige 7.

•**6.** Welche 3 aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen haben die Summe 33?

•**7.** Welche zweiziffrige Zahl ist durch 11 teilbar und hat die Quersumme 8?

8. Bei welcher Zahl ist es gleichgültig, ob man sie durch 2 teilt oder um 2 vermindert?

9. Bei welcher Zahl ist es gleichgültig, ob man sie mit 13 multipliziert oder durch 13 dividiert?

•**10.** Die Zehnerziffer einer zweistelligen Zahl ist um 2 kleiner als die Einerziffer. Die ganze Zahl ist 6mal so groß wie die Einerziffer. Wie heißt die Zahl?

11. Auf der Einerstelle einer zweistelligen Zahl steht die Ziffer 6. Vertauscht man Einer- und Zehnerziffer und addiert die neue Zahl zur ursprünglichen, so erhält man 88. Wie heißt die Zahl?

•**12.** Auf der Einerstelle einer dreistelligen Zahl steht die Ziffer 7. Die Anzahl der Zehner ist so groß wie die Anzahl der Einer und Hunderter zusammen. Nun vertauscht man die Einer- mit der Hunderterziffer. Die Summe aus der neuen und der ursprünglichen Zahl ist 1089. Wie heißt die Zahl?

:**13.** Die Hunderterziffer einer dreistelligen Zahl ist 4. Streicht man diese links weg und setzt sie rechts an, so entsteht eine um 243 größere Zahl. Berechne die ursprüngliche Zahl.

:**14.** Die Einerziffer einer sechsstelligen Zahl ist 2. Nimmt man diese Ziffer weg und setzt sie vor die übrigen, so entsteht eine Zahl, die gleich dem 3. Teil der ursprünglichen ist. Berechne die Zahl.

15. Die Summe zweier Zahlen ist 56, ihre Differenz 22. Wie heißen die Zahlen?

6.2.2 Bestimmung des Alters

Beispiel:

Eine Mutter ist jetzt dreimal so alt wie ihre Tochter. In 4 Jahren wird sie achtmal so alt sein, wie ihre Tochter vor 7 Jahren war. Wie alt sind Mutter und Tochter jetzt?

Lösung:

1. $x =$ jetziges Alter der Tochter in Jahren

2. Der Übersicht halber bestimmt man die Terme in einer Tabelle:

	vor 7 Jahren	jetzt	in 4 Jahren
Alter der Tochter in Jahren	$x-7$	x	$x+4$
Alter der Mutter in Jahren	$3x-7$	$3x$	$3x+4$

Bestimmungsgleichung: $3x+4=8\cdot(x-7)$

3.
$$3x+4=8x-56$$
$$60=5x$$
$$x=12.$$

4. Die Tochter ist jetzt 12 Jahre alt, die Mutter 36 Jahre.

Aufgaben

1. Ein Vater ist doppelt so alt wie sein Sohn. Vor 24 Jahren war er um 32 Jahre älter als dieser. Wie alt sind beide jetzt?

2. Eine Mutter, die jetzt doppelt so alt ist wie ihre Tochter, war vor 11 Jahren gerade dreimal so alt wie diese. Wie alt sind beide jetzt?

3. Hans ist 16 Jahre, sein Bruder Fritz 12 Jahre alt.
a) Vor wieviel Jahren war Hans doppelt so alt wie Fritz?
b) Vor wieviel Jahren war er $1\frac{1}{2}$mal so alt?

•**4.** Ein Vater ist jetzt 13mal so alt wie sein Sohn. Nach $17\frac{1}{2}$ Jahren ist das Alter des Vaters um $2\frac{1}{2}$ Jahre höher als das dreifache Alter des Sohnes. Wie alt sind beide jetzt?

5. An seinem 50. Geburtstag stellt ein Vater fest, daß seine drei Kinder zusammen ebenso alt sind wie er selbst. Die Tochter ist um 6 Jahre älter als der jüngste Sohn, der gerade halb so alt ist wie sein älterer Bruder.
a) Wie alt ist der Vater?
b) Wie alt sind die Kinder?

:**6.** In welchem Jahr fand zwischen Vater und Sohn folgendes Gespräch statt? »Bei deiner Geburt war ich 30 Jahre alt. Am Ende des 2. Weltkriegs warst du sieben. Heute bin ich gerade dreimal so alt wie du.«

•**7.** Ein Onkel ist jetzt dreimal so alt wie sein Neffe und viermal so alt, wie der Neffe vor 5 Jahren war. Wie alt sind beide jetzt?

⁝**8.** Otto ist jetzt dreimal so alt, wie Heinz vor fünf Jahren war. Nach 5 Jahren wird Otto doppelt so alt sein, wie Heinz jetzt ist. Wie alt sind beide jetzt?

⁝**9.** Lotte ist 19 Jahre alt. Als Helga 13 Jahre zählte, war Lotte ebenso alt, wie Helga jetzt ist. Wie alt ist Helga jetzt?

10. Karl ist 27 Jahre alt. Er ist dreimal so alt, wie Inge war, als Karl doppelt so alt war, wie Inge jetzt ist. Wie alt ist Inge jetzt?

• **11.** Der berühmte französische Philosoph und Mathematiker René DESCARTES (latinisiert zu CARTESIUS) hatte 4 Jahre vor Beginn des 30jährigen Krieges (1618) noch zwei Drittel seiner Lebenszeit vor sich. Er starb zwei Jahre nach Kriegsende. Berechne sein Geburts- und Todesjahr.

12. Müller & Sohn werben mit dem Slogan: »Wir haben zusammen 50 Jahre Berufserfahrung«. Wie alt können Vater Müller und Sohn Karl sein, wenn sie den Beruf seit dem 18. Lebensjahr ausüben und wenn der Vater mindestens 20 Jahre älter ist als sein Sohn? Wie alt sind sie zusammen?

13. *Löse ohne Bestimmungsgleichung durch Knobeln:*
PLATON war ein Schüler des SOKRATES, ARISTOTELES ein Schüler des PLATON. Der Schüler war jeweils um 43 Jahre jünger als sein Lehrer. Die Zahl der Lebensjahre hat bei jedem dieser Philosophen die Quersumme 8. Das von PLATON erreichte Alter wird durch die größte zweistellige Zahl mit dieser Eigenschaft angegeben. SOKRATES starb im 8., ARISTOTELES im 7. Jahrzehnt seines Lebens. Vermehrt man die doppelte Summe der drei Lebensalter um 1, so erhält man das Geburtsjahr des PLATON. Berechne für jeden der drei Philosophen das Geburts- und Todesjahr.

6.2.3 Prozentaufgaben

Beispiel:

Jemand hat einen gewissen Betrag als Einlage in ein Geschäft eingebracht. Nach einem Jahr erhält er 10% davon als Gewinn. Er erhöht seinen Geschäftsanteil um diesen Betrag. Im darauffolgenden Jahr erzielt er aber nur einen Gewinn von 5% seiner Einlage. Immerhin hat er nun 12400 DM mehr als anfangs. Wie groß war die ursprüngliche Einlage?

Lösung:

1. x = ursprüngliche Einlage in DM

2. Gewinn in DM im 1. Jahr = 10% von $x = 0{,}1x$
Einlage in DM für das 2. Jahr $= x + 0{,}1x = 1{,}1x$
Gewinn in DM nach dem 2. Jahr = 5% von $1{,}1x = 0{,}055x$
Kapital in DM am Ende des 2. Jahres $= 1{,}1x + 0{,}055x = 1{,}155x$
Bestimmungsgleichung: $1{,}155x = x + 12400$

3. $0{,}155x = 12400$
$x = 80000.$

4. Die Einlage betrug anfangs 80000 DM.

Beachte: $p\%$ ist die Zahl $\frac{p}{100}$.

$p\%$ von a bedeutet $\frac{p}{100} \cdot a$.

** Zur Geschichte des Prozentbegriffs

Die Idee, bei vielen Aufgaben des praktischen Lebens die Zahl 100 als Vergleichszahl zu wählen, hat sich seit alters her bewährt. Man findet sie bereits in einem babylonischen Text, bei Aufgaben der Ägypter, Griechen und Inder. Die italienischen Kaufleute des Mittelalters machten sehr häufig Angaben verschiedener Art »für hundert« = *per cento*. In süddeutschen Quellen taucht dieses italienische per cento im 15. Jh. auf; es wird zu Anfang des 16. Jh.s im hochdeutschen Sprachraum zu einem falsch latinisierten *pro cento**. Schließlich werden die beiden Wörter zusammengeschrieben, im 18. Jh. dann als *das Prozent* substantiviert und letztlich auch dekliniert. Im Österreichischen hat sich die süddeutsche Form als *das Perzent* noch erhalten.

Vielfach benützt man als Vergleichszahl auch die Zahl 1000, die im Lateinischen *mille* heißt; man spricht daher von einer Promille-Rechnung. Die Idee dazu stammt wohl von dem berühmten italienischen Arzt und Mathematiker Geronimo CARDANO (1501–1576).

Woher kommt unser Prozentzeichen %? In Italien kürzte man ab dem 14. Jh. das *per cento* durch $p\,c^{\circ}$ oder auch durch $p\,\mathring{c}$ ab, das handschriftlich manchmal die Form $\wp\,c^{o}$ hatte. In der 2. Hälfte des 17. Jh.s wurde vermutlich aus drucktechnischen Gründen aus dem c^{o} einfach $\frac{0}{0}$. Später ließ man das *per* weg. Schließlich schrieb 1841 Albert Franz JÖCHER das Zeichen $\frac{0}{0}$ mit dem schrägen Bruchstrich als ${}^{0}/_{0}$, woraus dann das Prozentzeichen % wurde.

Für *pro mille* schrieb man zunächst $\frac{00}{00}$, dann $\frac{0}{00}$ und schließlich mit dem schrägen Bruchstrich ${}^{0}/_{00}$.

1572

Abb. 171.1 Geronimo CARDANO (24.9.1501 Pavia – 20.9.1576 Rom)

Aufgaben

1. Ein Grossist verkauft das aus der Fabrik bezogene Tuch mit 15 % Gewinn an den Händler, der seinerseits noch 25 % Gewinn daraufschlägt. Nun ist das Meter um 17,50 DM teurer als der Fabrikpreis. Wie hoch war dieser?

• 2. Es spekuliert einer mit seinem Vermögen und gewinnt dadurch im ersten Jahr 7 %, verbraucht aber 20000 DM. Mit seinem jetzigen Vermögen gewinnt er im darauffolgenden Jahr 6 %, verbraucht aber 20900 DM, so daß er schließlich um 5 % mehr als am Anfang besitzt. Wieviel hatte er?

* Korrekt muß es nämlich *pro centum* heißen.

•3. Zwei Brüder erben zusammen 9240 DM zu ungleichen Teilen; da aber der eine sein Kapital zu $3\frac{1}{2}\%$, der andere zu 4% anlegt, erhalten sie jährlich den gleichen Zins. Wieviel erbte jeder?

•4. Zwei Kapitalien brachten gleich viel Zins, obwohl das erste um $\frac{1}{2}\%$ höher ausstand als das zweite. Wie hoch waren sie verzinst, wenn das erste 3000 DM, das zweite 3375 DM betrug?

5. Zu wieviel Prozent sind 2662,50 DM ausgeliehen, wenn sie in 144 Tagen 49,70 DM Zins einbringen? (Das Zinsjahr hat 360 Tage.)

•6. Ein Kapital von 6000 DM verzinst sich mit 3%. Nach einem Jahr wird der Zins zum Kapital geschlagen. Gleichzeitig ändert die Bank den Zinsfuß. Nach einem weiteren Jahr ist das Kapital samt Zinsen auf 6427,20 DM angewachsen. Wie hoch war der Zinsfuß im zweiten Jahr?

•7. 1800 DM sind zu einem gewissen Zinsfuß ausgeliehen. Ein zweites, um 400 DM größeres Kapital verzinst sich mit einem Zinsfuß, der $\frac{9}{7}$ von dem des ersten Kapitals beträgt. Beide Kapitalien zusammen bringen in einem Jahr 216 DM Zinsen ein. Wie hoch verzinst sich jedes der beiden Kapitalien?

8. Jemand hat $\frac{1}{4}$ eines Kapitals in Pfandbriefen angelegt, die sich mit $4\frac{1}{2}\%$ verzinsen, $\frac{1}{3}$ in Häusern, die 4%, $\frac{1}{5}$ in Grundstücken, die durch Verpachtung $3\frac{1}{2}\%$ einbringen. Den Rest hatte er in Aktien angelegt, bei denen er 2% verlor. Wie groß war sein Kapital, wenn er einen Jahreszins von 8175 DM erhielt?

•9. Auf ein Sparkonto wird ein gewisses Kapital eingezahlt, das mit 4% verzinst wird. Nach einem Jahr werden die Zinsen dazugeschlagen und noch 720 DM einbezahlt. Nach weiteren 75 Tagen ist das Konto mit Zinsen auf 5445 DM angewachsen. Wie groß war das Anfangskapital? (Das Zinsjahr hat 360 Tage.)

•10. Ein Spieler gewinnt beim ersten Spiel 30% seines Einsatzes. Dadurch ermutigt, wagt er ein zweites Spiel und verliert dabei 125% des vorher erzielten Gewinnes. Es bleiben ihm vom ursprünglichen Einsatz noch 74 DM. Wieviel hatte er eingesetzt?

11. Eine Rechnung macht einschließlich 14% Mehrwertsteuer 889,20 DM. Wieviel macht der reine Rechnungsbetrag ohne Steuer aus?

6.2.4 Mischungsaufgaben

Beispiel:
Aus einer 10 %igen und einer 4 %igen Salzlösung sollen durch Mischen 2 kg einer 7,6 %igen Salzlösung hergestellt werden. Wie viele kg von jeder der Ausgangslösungen muß man verwenden?

Lösung:

1. $x =$ Anzahl der kg der 10 %igen Salzlösung

2. Anzahl der kg der 4 %igen Salzlösung $= 2 - x$
Salzmenge in der 10 %igen Lösung in kg $= 10\,\%$ von $x = 0{,}1x$
Salzmenge in der 4 %igen Lösung in kg $= 4\,\%$ von $(2-x) = 0{,}04 \cdot (2-x) =$
$= 0{,}08 - 0{,}04x$
Salzmenge in der 7,6 %igen Lösung in kg $= 7{,}6\,\%$ von $2 = 0{,}076 \cdot 2 =$
$= 0{,}152$

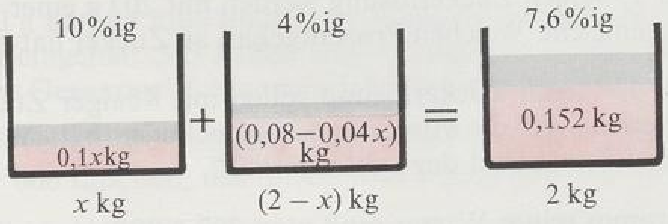

Abb. 173.1 Überlegungsfigur zur Aufstellung der Bestimmungsgleichung

Bestimmungsgleichung: $0{,}1x + (0{,}08 - 0{,}04x) = 0{,}152$

3.
$$0{,}06x = 0{,}072$$
$$x = 1{,}2.$$

4. Man muß 1,2 kg 10 %iger Salzlösung mit 0,8 kg 4 %iger Salzlösung mischen, um 2 kg einer 7,6 %igen Salzlösung zu erhalten.

Beachte: **1.** Prozentangaben bei Mischungen bedeuten Gewichtsprozente, wenn nichts anderes gesagt wird.
So enthält z. B. eine 12 %ige Salzlösung 12 g Salz je 100 g Lösung.
2. Bei Mischungen gilt:
Menge eines Stoffes vorher = Menge des Stoffes nachher

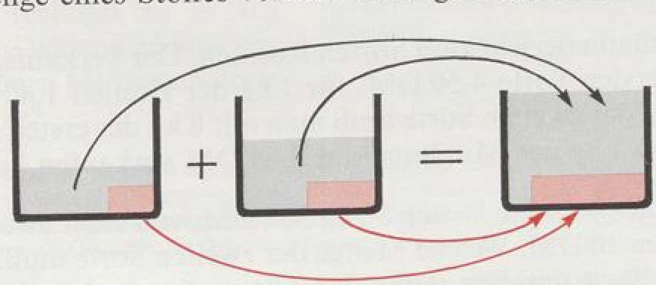

Abb. 173.2 Veranschaulichung der Erhaltung der Menge beim Mischen

Aufgaben

•**1.** *Aufgabe 71* aus dem *Papyrus Rhind:* Aus einem Krug Bier der Stärke 2 wird $\frac{1}{4}$ abgeschüttet und durch Wasser ersetzt. Wie groß ist die Stärke der Mischung?

2. 800 g einer 10%igen Sole werden mit 400 g Wasser verdünnt. Wieviel % Salz enthält die Mischung?

•**3.** Bei starken Blutverlusten wird häufig $\frac{2}{3}$%ige Kochsalzlösung in die Blutbahn eingeführt. Mit wieviel kg reinem Wasser muß man 539 g einer 2%igen Kochsalzlösung verdünnen, um die erforderliche Konzentration herzustellen?

4. 180 g einer Sole werden durch Verdampfen 125 g Wasser entzogen, wodurch ihr Salzgehalt auf 12% ansteigt. Welchen Salzgehalt hatte sie anfangs?

5. 255 g einer 15%igen Zuckerlösung werden mit 207 g einer 8%igen Zuckerlösung gemischt. Welchen Prozentgehalt an Zucker hat die Mischung?

6. 595 g einer 15%igen Zuckerlösung sollen mit 8%iger Zuckerlösung so gemischt werden, daß die Mischung 12% Zucker enthält. Wieviel Gramm der zweiten Lösung sind dazu erforderlich?

7. Wieviel Gramm reines Wasser muß man 300 g 98%igem Alkohol zusetzen, um 60%igen Alkohol zu erhalten?

8. Von zwei Sorten Spiritus enthält die eine 4 kg Alkohol in 7 kg Spiritus, die andere 7 kg Alkohol in 8 kg Spiritus. Wie viele kg von jeder Sorte Spiritus sind zur Herstellung einer Sorte verwendet worden, die 33 kg Alkohol in 45 kg Spiritus enthält?

•**9.** Ein Faß enthielt 98%igen Spiritus. Nachdem jemand 12 kg abzapfte und durch Wasser ersetzte, war der Alkoholgehalt nur noch 83%. Wie viele kg Spiritus enthielt das Faß?

10. Das Meerwasser im Persischen Golf enthält etwa 5% Salz. Wie viele kg Süßwasser muß man zu 40 kg Meerwasser dazugießen, damit der Salzgehalt der Mischung 2% beträgt?

•**11.** Ein Kaufmann bezieht zwei Sorten Rosinen. Der Verkaufspreis würde für 2 kg der ersten Sorte 4,50 DM, für 1 kg der zweiten 1,80 DM betragen. Wieviel kg der zweiten Sorte muß man mit 8 kg der ersten Sorte mischen, damit man 1 kg der Mischung um 2,04 DM verkaufen kann?

•**12.** Von einer Kaffeesorte kosten 16 kg 368 DM, von einer zweiten kostet das Kilogramm 30 DM. Welche Menge der zweiten Sorte muß man mit 26 kg der ersten Sorte mischen, damit das Kilogramm der Mischung um 26 DM verkauft werden kann?

13. 1 kg Likörbohnen kostet 31,20 DM, $\frac{1}{2}$ kg Pralinen 9,60 DM. Wie müssen die Pralinen und Likörbohnen gemischt werden, damit 1 kg der Mischung 24 DM kostet?

14. Ein Auto braucht als Kühlflüssigkeit für den Motor eine Mischung aus Wasser und einem Frostschutzmittel. Der Anteil des benötigten Frostschutzmittels hängt vom Klima ab.

a) Herr Huber hat in einem Kanister 10 kg Kühlflüssigkeit mit einem Frostschutzmittelanteil von 25%. Für den zu erwartenden kalten Winter braucht er aber einen Frostschutzmittelanteil von 40%. Wieviel Wasser muß er verdampfen und durch reines Frostschutzmittel ersetzen?

b) Wieviel kg reines Frostschutzmittel muß man zu 10 kg Kühlflüssigkeit mit 25% Anteil schütten, um 40%ige Kühlflüssigkeit zu erhalten?

c) Wieviel kg der Kühlflüssigkeit muß man durch reines Frostschutzmittel ersetzen, um aus 10 kg 25%iger Kühlflüssigkeit 10 kg 40%ige zu erhalten?

15. Mit wieviel g Kupfer muß man 234 g Feingold mischen, wenn die Legierung den Feingehalt 585 haben soll? (**Feingehalt** ist der heute meist in Promille des Gesamtgewichts ausgedrückte Gehalt an reinem Edelmetall.)

16. In welchem Verhältnis muß man Silber vom Feingehalt 750 mit Silber vom Feingehalt 600 mischen, um Silber vom Feingehalt 700 zu erhalten?

17. Manchmal wird der Feingehalt von Gold in Karat, der von Silber in Lot angegeben. Gold von n Karat besteht zu $\frac{n}{24}$ aus Feingold, Silber von n Lot zu $\frac{n}{16}$ aus Feinsilber.*

a) Wieviel g Feingold und wie viel g Kupfer benötigt man zur Herstellung eines 14karätigen Ringes von 5 g?

b) Ein Silberschmied möchte 24 10lötige Teelöffel zu je 50 g herstellen. Welche Menge des vorhandenen 14lötigen Silbers benötigt er?

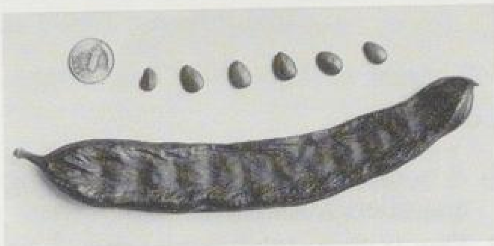

Abb. 175.1 Hülse und Samen des Johannisbrotbaums (Ceratónia síliqua), zum Vergleich eine 1-Pf-Münze. Das Gewicht der Samen wurde zu 77, 205, 221, 209, 202 und 158 mg bestimmt. Die mittleren vier wiegen also mit guter Näherung 0,2 g. Bedenke die Genauigkeit der alten Waagen!

* Feingold ist Gold mit einem Feingehalt von mehr als 997‰. Rechne aber so, als wäre Feingold reines Gold. Das **Karat** entstand aus dem griechischen κεράτιον (kerátion) = *Hörnchen*, womit aber, ihrer Form wegen, auch die *Hülse des Johannisbrotbaums* bezeichnet wurde; arabisch *kirrat*. Die harten, nahezu gleichmäßig großen Samen wurden als Gewichte für Gold und Edelsteine verwendet. Heute gibt es für Edelsteine das metrische Karat = 0,2 g.
Das Wort Lot stammt aus dem Keltischen, wo es Blei bedeutet. Es wurde später auch als Gewichtseinheit verwendet.

6.2.5 Leistungsaufgaben

Die ältesten mathematischen Texte handeln von Aufgaben aus dem Wirtschaftsleben. Ein wichtiger Typ dieser Wirtschaftsaufgaben beschäftigte sich mit Problemen, bei denen Menschen, Tiere oder Geräte verschiedener Leistung zusammenwirkten und so eine Gesamtleistung erbrachten.
Einen Sonderfall dieses Aufgabentyps stellen die **Zisternenaufgaben** dar. Sie handeln von Zisternen, Brunnen, Bädern, Teichen, Fässern und dergleichen mehr, die jeweils mehrere Zu- und Abflüsse besitzen. Betrachten wir die älteste uns überlieferte Zisternenaufgabe. Sie stammt aus dem chinesischen Rechenbuch 九章算術 *Chiu Chang Suan Shu* (= *Neun Bücher arithmetischer Technik*), das vermutlich zu Beginn der Han-Zeit entstanden ist, die von 202 v. Chr. bis 9 n. Chr. dauerte (siehe auch Seite 85):

Beispiel:

Jetzt hat man einen Teich, 5 Kanäle führen ihm Wasser zu. Öffnet man von ihnen 1 Kanal, dann bekommt man in $\frac{1}{3}$ Tag 1 Füllung, beim nächsten in 1 Tag 1 Füllung, beim nächsten in $2\frac{1}{2}$ Tagen 1 Füllung, beim nächsten in 3 Tagen 1 Füllung und beim nächsten in 5 Tagen 1 Füllung. Jetzt öffnet man sie alle gleichzeitig. Frage: In wieviel Tagen füllen sie den Teich?

Lösung:

1. $x =$ Zeit in Tagen, die zur Füllung des Teichs benötigt wird, wenn Wasser aus allen Kanälen zufließt.

2. Der 1. Kanal liefert in 1 Tag 3 Füllungen.
Der 2. Kanal liefert in 1 Tag 1 Füllung.
Der 3. Kanal liefert in 1 Tag $\dfrac{1}{2\frac{1}{2}}$ Füllungen $= \frac{2}{5}$ Füllungen.
Der 4. Kanal liefert in 1 Tag $\frac{1}{3}$ Füllung.
Der 5. Kanal liefert in 1 Tag $\frac{1}{5}$ Füllung.

Somit gilt: Alle 5 Kanäle liefern in 1 Tag $(3 + 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5})$ Füllungen $=$
$= 4\frac{14}{15}$ Füllungen.
Alle 5 Kanäle liefern in x Tagen $4\frac{14}{15} \cdot x$ Füllungen. Das soll aber gerade 1 Füllung sein, weil ja nach x Tagen der Teich durch alle Kanäle gefüllt sein soll. Also erhalten wir die
Bestimmungsgleichung: $4\frac{14}{15}x = 1$

3.
$$\frac{74}{15}x = 1$$
$$x = \frac{15}{74}.$$

4. Nach $\frac{15}{74}$ Tagen, das sind etwas weniger als 5 Stunden, wird der Teich durch alle 5 Kanäle gefüllt.

Beachte: 1. Bestimme, was in der *Zeiteinheit* jedes Gerät liefert oder verbraucht.
2. Bestimme die einzelnen Lieferungen in der betrachteten Zeit.
3. Die Summe aller Einzellieferungen ergibt die gewünschte Gesamtlieferung (meistens die Einheit).

Aufgaben

1. Von DIOPHANT (um 250 n. Chr.) stammt die Aufgabe:
Bin ein Löw aus Erz. Aus den Augen, aus Mund und der Sohle unter dem rechten Fuß springen Fontänen hervor. Daß das Becken sich füllt, braucht rechts das Auge zwei Tage, links das Auge braucht drei und meine Fußsohle vier. Doch meinem Munde genügen sechs Stunden. Wie lange wohl dauert's, wenn sich alles vereint, Augen und Sohle und Mund?

2. Ein byzantinisches Rechenbuch des frühen 14. Jh.s überliefert uns:
Einer hatte ein Schiff mit 5 Segeln. Mit dem ersten Segel nun wurde es an das beabsichtigte Ziel in der Hälfte eines Tages hingebracht, mit dem zweiten aber in $\frac{1}{3}$ Tag, mit dem dritten in $\frac{1}{5}$ Tag, dem vierten in $\frac{1}{7}$ und mit dem fünften Segel in $\frac{1}{9}$ Tag. Nachdem nun die 5 Segel gleichzeitig gehißt waren, in welchem Teil des Tages wurde das Schiff hingebracht?

3. Johannes WIDMANN VON EGER (um 1460–nach 1500) stellt in seiner *Behende und hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft* 1489 die folgende Aufgabe:
1 Leb vnd 1 Hunt vnd 1 Wolff
Die essen mit eynander 1 schoff
Und der Leb eß das schaff alleyn
in eyner stund Und der wolff
ynn 4 stunden Und der hunt in 6
stunden. Nu ist die frag wen sy
das schoff all z miteynander essen
in wie langer zeyt sy das essen.

4. Ein Gasherd mit zwei Brennern wird aus einer Propangasflasche gespeist. Mit einer Füllung kann der eine Brenner 30 Std., der andere 20 Std. bei voller Flamme versorgt werden. Wie lange reicht der Flascheninhalt, wenn beide Brenner gleichzeitig in Betrieb sind?

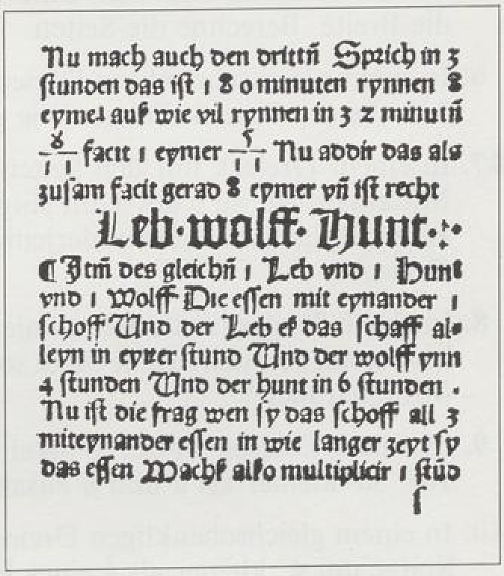
Nu mach auch den drittñ Sprich in ʒ
stunden das ist 1 8 0 minuten rynnen 8
eymer auf wie vil rynnen in ʒ z minutñ
$\frac{8}{11}$ facit 1 eymer $\frac{5}{11}$ Nu addir das als
zusam facit gerad 8 eymer vñ ist recht
Leb · wolff · Hunt ·:·
Jtm̃ des gleichñ 1 Leb vnd 1 Hunt
vnd 1 Wolff Die essen mit eynander 1
schoff Und der Leb eß das schaff al-
leyn in eyner stund Und der wolff ynn
4 stunden Und der hunt in 6 stunden .
Nu ist die frag wen sy das schoff all ʒ
miteynander essen in wie langer zeyt sy
das essen Machs also multiplicir 1 stūd
s

Abb. 177.1 Folium 138r der *Behende und hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft* des Johannes WIDMANN VON EGER (um 1460–nach 1500) von 1489

5. Ein Wasserbehälter hat zwei Zuflußröhren. Mittels der ersten Röhre allein kann der Behälter in 6 Std., mittels der zweiten in 4 Std. gefüllt werden. Wie lange dauert das Füllen, wenn beide Röhren gleichzeitig in Betrieb sind?

••6. Zum Ausheben einer Baugrube wird ein Bagger verwendet, der die gesamte Arbeit in 8 Tagen erledigen würde. Um schneller voranzukommen, wird nach 3 Tagen noch ein zweiter Bagger eingesetzt, der den gesamten Aushub in 12 Tagen allein bewältigen könnte. Wieviel Tage müssen beide Maschinen noch gemeinsam in Betrieb sein?

6.2.6. Aufgaben aus der Geometrie

1. Verkleinert man eine Seite eines Quadrats um 1 m, so entsteht ein um 11 m^2 kleineres Rechteck. Wie lang ist die Quadratseite?

2. Vergrößert man eine Seite eines Quadrats um 2 cm, so entsteht ein um 1,22 dm^2 größeres Rechteck. Wie lang ist die Quadratseite?

3. Die zwei Seiten eines Rechtecks unterscheiden sich um 5 cm. Die Fläche dieses Rechtecks ist um 64 cm^2 kleiner als die Fläche eines Rechtecks, dessen eine Seite um 13 cm größer ist als die kleinere Seite des gegebenen Rechtecks, während die andere Seite so lang wie diese ist.

4. Der Umfang eines Dreiecks ist 20 cm. Die erste Seite ist um 1 cm länger als die zweite, die dritte um 2 cm kürzer. Wie lang sind die drei Seiten?

5. In einem Rechteck mit dem Umfang 30 cm ist die Länge $1\frac{1}{2}$mal so groß wie die Breite. Berechne die Seiten.

6. In einem gleichschenkligen Dreieck mit der Basis 8 cm ist der Umfang das $3\frac{3}{5}$fache der Schenkellänge. Wie groß ist diese?

••7. In einem Dreieck mit den Seiten a, b, c und dem Umfang 12 m ist die Mittelparallele zu b um 5 dm länger als diejenige zu a; die Mittelparallele zu c beträgt das $1\frac{1}{4}$fache derjenigen zu b. Berechne die drei Seiten des Dreiecks.

8. In einem Trapez ist die Mittellinie um 4 cm länger als die eine der parallelen Seiten, von denen eine 5mal so lang wie die andere ist. Wie lang ist die Mittelparallele?

9. In einem Dreieck ist der Winkel β um $54^\circ 54'$ größer als α, ferner γ um $103^\circ 30'$ kleiner als α und β zusammen. Berechne die drei Winkel.

•10. In einem gleichschenkligen Dreieck ist das Doppelte des Winkels an der Spitze um 4° kleiner als $\frac{2}{3}$ eines Basiswinkels. Berechne die Winkel.

••11. In einem Dreieck ABC ist der Außenwinkel bei A $\frac{8}{3}$mal so groß wie der Innenwinkel bei B, während der Innenwinkel bei C 5mal so groß ist wie derjenige bei A. Berechne die Dreieckswinkel.

•**12.** In einem Viereck ABCD ist der Winkel bei B um 30° kleiner als der bei A, der Winkel bei C 3mal so groß wie der bei B und der Winkel bei D das $\frac{7}{12}$fache der Summe aus den Winkeln bei B und C. Berechne die vier Winkel.

13. Wie groß ist die Eckenzahl eines Vielecks ohne einspringende Ecken, bei dem die Summe der Innenwinkel
a) 7mal **b)** $5\frac{1}{2}$mal so groß ist wie die Summe der Außenwinkel?