Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

6.2.5 Leistungsaufgaben

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

6.2.5 Leistungsaufgaben

Die ältesten mathematischen Texte handeln von Aufgaben aus dem Wirtschaftsleben. Ein wichtiger Typ dieser Wirtschaftsaufgaben beschäftigte sich mit Problemen, bei denen Menschen, Tiere oder Geräte verschiedener Leistung zusammenwirkten und so eine Gesamtleistung erbrachten.

Einen Sonderfall dieses Aufgabentyps stellen die **Zisternenaufgaben** dar. Sie handeln von Zisternen, Brunnen, Bädern, Teichen, Fässern und dergleichen mehr, die jeweils mehrere Zu- und Abflüsse besitzen. Betrachten wir die älteste uns überlieferte Zisternenaufgabe. Sie stammt aus dem chinesischen Rechenbuch 九章算術 *Chiu Chang Suan Shu* (= *Neun Bücher arithmetischer Technik*), das vermutlich zu Beginn der Han-Zeit entstanden ist, die von 202 v. Chr. bis 9 n. Chr. dauerte (siehe auch Seite 85):

Beispiel:

Jetzt hat man einen Teich, 5 Kanäle führen ihm Wasser zu. Öffnet man von ihnen 1 Kanal, dann bekommt man in $\frac{1}{3}$ Tag 1 Füllung, beim nächsten in 1 Tag 1 Füllung, beim nächsten in $2\frac{1}{2}$ Tagen 1 Füllung, beim nächsten in 3 Tagen 1 Füllung und beim nächsten in 5 Tagen 1 Füllung. Jetzt öffnet man sie alle gleichzeitig. Frage: In wieviel Tagen füllen sie den Teich?

Lösung:

1. x = Zeit in Tagen, die zur Füllung des Teichs benötigt wird, wenn Wasser aus allen Kanälen zufließt.

2. Der 1. Kanal liefert in 1 Tag 3 Füllungen.
Der 2. Kanal liefert in 1 Tag 1 Füllung.
Der 3. Kanal liefert in 1 Tag $\dfrac{1}{2\frac{1}{2}}$ Füllungen $= \frac{2}{5}$ Füllungen.
Der 4. Kanal liefert in 1 Tag $\frac{1}{3}$ Füllung.
Der 5. Kanal liefert in 1 Tag $\frac{1}{5}$ Füllung.

Somit gilt: Alle 5 Kanäle liefern in 1 Tag $(3 + 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5})$ Füllungen $= 4\frac{14}{15}$ Füllungen.
Alle 5 Kanäle liefern in x Tagen $4\frac{14}{15} \cdot x$ Füllungen. Das soll aber gerade 1 Füllung sein, weil ja nach x Tagen der Teich durch alle Kanäle gefüllt sein soll. Also erhalten wir die
Bestimmungsgleichung: $4\frac{14}{15}x = 1$

3.
$$\frac{74}{15}x = 1$$
$$x = \frac{15}{74}.$$

4. Nach $\frac{15}{74}$ Tagen, das sind etwas weniger als 5 Stunden, wird der Teich durch alle 5 Kanäle gefüllt.

Beachte: **1.** Bestimme, was in der *Zeiteinheit* jedes Gerät liefert oder verbraucht.
2. Bestimme die einzelnen Lieferungen in der betrachteten Zeit.
3. Die Summe aller Einzellieferungen ergibt die gewünschte Gesamtlieferung (meistens die Einheit).

Aufgaben

1. Von Diophant (um 250 n. Chr.) stammt die Aufgabe:
Bin ein Löw aus Erz. Aus den Augen, aus Mund und der Sohle unter dem rechten Fuß springen Fontänen hervor. Daß das Becken sich füllt, braucht rechts das Auge zwei Tage, links das Auge braucht drei und meine Fußsohle vier. Doch meinem Munde genügen sechs Stunden. Wie lange wohl dauert's, wenn sich alles vereint, Augen und Sohle und Mund?

2. Ein byzantinisches Rechenbuch des frühen 14. Jh.s überliefert uns:
Einer hatte ein Schiff mit 5 Segeln. Mit dem ersten Segel nun wurde es an das beabsichtigte Ziel in der Hälfte eines Tages hingebracht, mit dem zweiten aber in $\frac{1}{3}$ Tag, mit dem dritten in $\frac{1}{5}$ Tag, dem vierten in $\frac{1}{7}$ und mit dem fünften Segel in $\frac{1}{9}$ Tag. Nachdem nun die 5 Segel gleichzeitig gehißt waren, in welchem Teil des Tages wurde das Schiff hingebracht?

3. Johannes Widmann von Eger (um 1460–nach 1500) stellt in seiner *Behende und hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft* 1489 die folgende Aufgabe:
1 Leb vnd 1 Hunt vnd 1 Wolff
Die essen mit eynander 1 schoff
Und der Leb eß das schaff alleyn in eyner stund Und der wolff ynn 4 stunden Und der hunt in 6 stunden. Nu ist die frag wen sy das schoff all z miteynander essen in wie langer zeyt sy das essen.

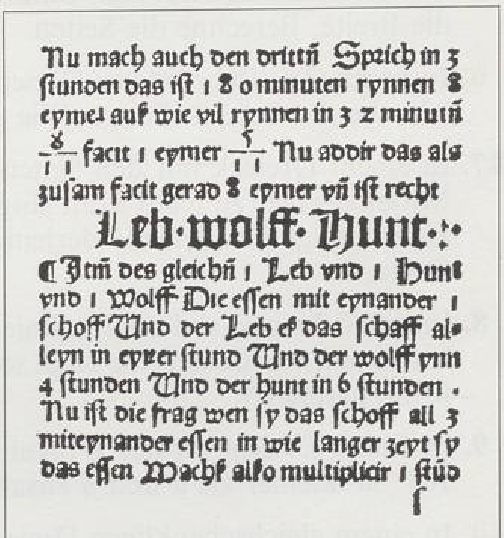
Nu mach auch den drittñ Spzich in 3 stunden das ist 1 8 0 minuten rynnen 8 eymer auf wie vil rynnen in 3 2 minutñ $\frac{8}{11}$ facit 1 eymer $\frac{5}{11}$ Nu addir das als zusam facit gerad 8 eymer vñ ist recht
Leb·wolff·Hunt
Item des gleichñ 1 Leb vnd 1 Hunt vnd 1 Wolff Die essen mit eynander 1 schoff Und der Leb eß das schaff alleyn in eyner stund Und der wolff ynn 4 stunden Und der hunt in 6 stunden. Nu ist die frag wen sy das schoff all 3 miteynander essen in wie langer zeyt sy das essen Machs also multiplicir 1 stūd

Abb. 177.1 Folium 138r der *Behende und hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft* des Johannes Widmann von Eger (um 1460–nach 1500) von 1489

4. Ein Gasherd mit zwei Brennern wird aus einer Propangasflasche gespeist. Mit einer Füllung kann der eine Brenner 30 Std., der andere 20 Std. bei voller Flamme versorgt werden. Wie lange reicht der Flascheninhalt, wenn beide Brenner gleichzeitig in Betrieb sind?

5. Ein Wasserbehälter hat zwei Zuflußröhren. Mittels der ersten Röhre allein kann der Behälter in 6 Std., mittels der zweiten in 4 Std. gefüllt werden. Wie lange dauert das Füllen, wenn beide Röhren gleichzeitig in Betrieb sind?

:6. Zum Ausheben einer Baugrube wird ein Bagger verwendet, der die gesamte Arbeit in 8 Tagen erledigen würde. Um schneller voranzukommen, wird nach 3 Tagen noch ein zweiter Bagger eingesetzt, der den gesamten Aushub in 12 Tagen allein bewältigen könnte. Wieviel Tage müssen beide Maschinen noch gemeinsam in Betrieb sein?

6.2.6. Aufgaben aus der Geometrie

1. Verkleinert man eine Seite eines Quadrats um 1 m, so entsteht ein um 11 m² kleineres Rechteck. Wie lang ist die Quadratseite?
2. Vergrößert man eine Seite eines Quadrats um 2 cm, so entsteht ein um 1,22 dm² größeres Rechteck. Wie lang ist die Quadratseite?
3. Die zwei Seiten eines Rechtecks unterscheiden sich um 5 cm. Die Fläche dieses Rechtecks ist um 64 cm² kleiner als die Fläche eines Rechtecks, dessen eine Seite um 13 cm größer ist als die kleinere Seite des gegebenen Rechtecks, während die andere Seite so lang wie diese ist.
4. Der Umfang eines Dreiecks ist 20 cm. Die erste Seite ist um 1 cm länger als die zweite, die dritte um 2 cm kürzer. Wie lang sind die drei Seiten?
5. In einem Rechteck mit dem Umfang 30 cm ist die Länge $1\frac{1}{2}$mal so groß wie die Breite. Berechne die Seiten.
6. In einem gleichschenkligen Dreieck mit der Basis 8 cm ist der Umfang das $3\frac{3}{5}$fache der Schenkellänge. Wie groß ist diese?

:7. In einem Dreieck mit den Seiten a, b, c und dem Umfang 12 m ist die Mittelparallele zu b um 5 dm länger als diejenige zu a; die Mittelparallele zu c beträgt das $1\frac{1}{4}$fache derjenigen zu b. Berechne die drei Seiten des Dreiecks.

8. In einem Trapez ist die Mittellinie um 4 cm länger als die eine der parallelen Seiten, von denen eine 5mal so lang wie die andere ist. Wie lang ist die Mittelparallele?
9. In einem Dreieck ist der Winkel β um $54°\,54'$ größer als α, ferner γ um $103°\,30'$ kleiner als α und β zusammen. Berechne die drei Winkel.

•10. In einem gleichschenkligen Dreieck ist das Doppelte des Winkels an der Spitze um 4° kleiner als $\frac{2}{3}$ eines Basiswinkels. Berechne die Winkel.

:11. In einem Dreieck ABC ist der Außenwinkel bei A $\frac{8}{3}$mal so groß wie der Innenwinkel bei B, während der Innenwinkel bei C 5mal so groß ist wie derjenige bei A. Berechne die Dreieckswinkel.