UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

7 Schwierige Termumformungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

Visual Library

7 Schwierigere Termumformungen

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

7 Schwierigere Termumformungen

7.1 Multiplikation von Aggregaten

Nach dem allgemeinen Distributivgesetz (Satz 90.2) weißt du bereits, wie du ein Aggregat mit einer Zahl multiplizierst. Unter Berücksichtigung der Vorzeichenregeln wirst du also beispielsweise so rechnen:

$$a(b+c-d) = ab + ac - ad.$$

Was machst du aber, wenn du zwei Aggregate miteinander zu multiplizieren hast? Betrachten wir als **Beispiel** das Produkt

$$(-a+b)(c-d-e).$$

Stell dir vor, du könntest die erste Klammer ausrechnen und erhieltest als Wert die Zahl z. Dann hättest du nur noch $z(c-d-e)$ zu berechnen. Das kannst du aber nach dem Obigen leicht ausführen:

$$z(c-d-e) = zc - zd - ze.$$

Nun setzt du an Stelle von z wieder die ursprüngliche Klammer $(-a+b)$; dann nimmt die rechte Seite die folgende Form an:

$$zc - zd - ze = (-a+b)c - (-a+b)d - (-a+b)e.$$

Das rechts stehende Aggregat kannst du leicht mit Hilfe von Satz 108.1 umformen:

$$(-a+b)c - (-a+b)d - (-a+b)e = -ac + bc + ad - bd + ae - be.$$

Betrachtest du nun den Anfang und das Ende deiner Rechnung und ordnest die erhaltenen Summanden bezüglich des ersten Faktors a bzw. b, so ergibt sich

$$(-a+b)(c-d-e) = -ac + ad + ae + bc - bd - be,$$

und du erkennst die Gültigkeit von

Satz 182.1: Zwei Aggregate werden miteinander multipliziert, indem man unter Berücksichtigung der Vorzeichenregeln jedes Glied des einen Aggregats mit jedem Glied des anderen Aggregats multipliziert und die entstandenen Produkte addiert.

Beachte:

1) Damit du die Übersicht nicht verlierst, raten wir dir folgendes Vorgehen: Multipliziere zuerst mit dem 1. Glied des 1. Aggregats der Reihe nach jedes Glied des 2. Aggregats. Multipliziere dann mit dem 2. Glied des 1. Aggre-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

gats der Reihe nach jedes Glied des 2. Aggregats. Fahre so fort, bis du schließlich mit dem letzten Glied des 1. Aggregats der Reihe nach jedes Glied des 2. Aggregats multipliziert hast.

$$(-a+b)(c-d-e) = -ac+ad+ae+bc-bd-be$$

2) Nehmen wir an, das erste Aggregat bestehe aus m Gliedern und das zweite aus n Gliedern, dann hat das nach der Ausführung der Multiplikation entstandene Aggregat $m \cdot n$ Glieder, weil ja jedes Glied des ersten Aggregats mit jedem Glied des zweiten multipliziert werden muß. Damit kannst du kontrollieren, ob du kein Produkt vergessen hast!

Beispiel 1:

$$\begin{aligned}&(2x^2-3x-4)(5x-6) =\\&= 10x^3-12x^2-15x^2+18x-20x+24 =\\&= 10x^3-27x^2-2x+24.\end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned}&(\tfrac{3}{4}x+\tfrac{2}{3}y)(\tfrac{9}{16}x^2-\tfrac{1}{2}xy+\tfrac{4}{9}y^2) =\\&= \tfrac{27}{64}x^3-\tfrac{3}{8}x^2y+\tfrac{1}{3}xy^2+\tfrac{3}{8}x^2y-\tfrac{1}{3}xy^2+\tfrac{8}{27}y^3 =\\&= \tfrac{27}{64}x^3+\tfrac{8}{27}y^3.\end{aligned}$$

Satz 182.1 läßt sich auch anwenden, wenn das Produkt aus mehr als zwei Aggregaten besteht. Sind es drei Aggregate, dann rechnest du am besten von links nach rechts der Reihe nach. Sind es aber vier oder mehr Aggregate, dann kannst du unter Verwendung des Assoziativgesetzes und unter Umständen auch des Kommutativgesetzes jeweils zwei geeignete Aggregate zu einem Produkt zusammenfassen und darauf Satz 182.1 anwenden. Mit einiger Erfahrung wirst du erkennen, welche Zusammenfassungen günstig sind. Ehe du dann weiterrechnest, mußt du die erhaltenen Aggregate noch vereinfachen. Dazu

Beispiel 3:

$$\begin{aligned}&(2a-3b)(2a+3b)(5a-b) =\\&\stackrel{A}{=} [(2a-3b)(2a+3b)](5a-b) =\\&= (4a^2+6ab-6ab-9b^2)(5a-b) =\\&= (4a^2-9b^2)(5a-b) =\\&= 20a^3-4a^2b-45ab^2+9b^3.\end{aligned}$$

Beispiel 4:

$$\begin{aligned}&7b(2a-b)(a-2b)(-a-2b)(2a+b) =\\&\stackrel{A}{=} 7b[(2a-b)(a-2b)][(-a-2b)(2a+b)] =\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 7b(2a^2 - 4ab - ab + 2b^2)(-2a^2 - ab - 4ab - 2b^2) = \\
&= 7b(2a^2 - 5ab + 2b^2)(-2a^2 - 5ab - 2b^2) = \\
&= 7b(-4a^4 - 10a^3b - 4a^2b^2 + 10a^3b + 25a^2b^2 + 10ab^3 - \\
&\quad - 4a^2b^2 - 10ab^3 - 4b^4) = \\
&= 7b(-4a^4 + 17a^2b^2 - 4b^4) = \\
&= -28a^4b + 119a^2b^3 - 28b^5.
\end{aligned}
$$

Aufgaben

1. **a)** $(p+q)(u+v)$ **b)** $(x+y)(a-b)$ **c)** $(3-s)(t+5)$
d) $(a-b)(c-d)$ **e)** $(-1+m)(m-n)$ **f)** $(-x-y)(-u-v)$

2. **a)** $(27a-3b)(ax+11y)$ **b)** $(16p-18r)(13q+9)$
c) $(-1\frac{2}{3}x+y)(\frac{4}{5}x-4\frac{1}{5}y)$ **d)** $(2{,}15m-0{,}7n)(3{,}5k+20{,}1l)$
e) $(0{,}05-5{,}3a)(-1{,}2a-3)$ **f)** $(1\frac{3}{7}p^2+0{,}5q)(1{,}25p+\frac{3}{4}q^3)$

3. **a)** $(a+b)(c-d)-(a-b)(c+d)$
b) $(a-b)(c-d)-(a+b)(c-d)$
c) $(a+b)(c+d)-(a-b)(c-d)$
d) $(3-r)(s+2t)-(7s+5t)(3r+8)+(4s-t)(r+1)$
e) $(2y-7)(5+y^2)+4y(3-5y-2y^2)-(y-6)(9y^2+1)$

4. **a)** $(17x^2a-3a^4)(x-5a)-(7a^2x^2+2x)(1+5a^4)$
b) $3m(16m-9n^3)(5m^2-n)-(12m^3-7n)(-2m-mn^3)(-2)$

5. **a)** $(3x^2+5y)[(27y-8x)-(14x+2y)]$
b) $(3a-9b)(2b+c)(-c-5a)$

6. **a)** $(u+v)(x+y+z)$ **b)** $(3s-2t+1)(p-3q-7r)$
c) $(m^2-n+1)(n^2+m+1)$ **d)** $(a-2b+3c-4d)(5e-6f+7g)$

7. **a)** $(1+x+x^2+x^3)(1-x)$ **b)** $(1-y+y^2-y^3+y^4)(1+y)$
c) $(1-a^2)(1+a^2+a^4+a^6)$ **d)** $(a^2+ab+b^2)(a-b)$

•**8.** **a)** $(1\frac{2}{5}x^2y-\frac{3}{4}xy^2)(17\frac{1}{2}x-\frac{3}{14}-2\frac{2}{7}y)$
b) $(0{,}04a^2-0{,}1ab+0{,}25b^2)(0{,}2a+0{,}5b)$
c) $(\frac{3}{4}x-\frac{2}{5}y)(\frac{9}{16}x^2+0{,}3xy+0{,}16y^2)$

9. **a)** $(a+b)(a+2b)(a+3b)$ **b)** $(a-b)(a-2b)(a-3b)$
c) $(1-x)(x+x^2)(2x-1)$ **d)** $(2-x)(4-x^2)(8-x^3)$

•**10.** **a)** $(1{,}2x-0{,}1y)(1{,}44x^2+0{,}01y^2)(0{,}1y+1{,}2x)$
b) $(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}x)(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}x^2)(\frac{4}{9}x^2-\frac{1}{4})$

11. **a)** $(1-x)(2-x)(3-x)(4-x)$ **b)** $(1-x)(2+x)(3-x)(4+x)$
c) $(2-y)(4+y^2)(4+2y+y^2)(-y+2)$

12. $(x^2 - x + 1)(x - 1) - (x^2 + x - 1)(x + 1)$

13. $(1 + 2x + x^2)(x - 2) + 4(x + 1) - (x + 2)(x^2 - 2x + 1)$

14. $(3x^2 - 2x + 1)(1 - 2x) - 11x^2 - 4(3 + 2x - x^2) + 6x(x^2 + 4)$

15. $(x^2 + ax + 2a^2)(2a - x) - (x^2 - 2ax + a^2)(x - 2a) - 2(3a^3 - x^3)$

16. $(3ab + 4ac - 7bc)(5ab - 6ac) - (4ab - 8ac + 7bc)(5ac - 7bc)$

17. $(x^2y - 2xy^2 + 3y^3)(2x^2 - 3xy) - (3x^3 + 2x^2y + xy^2)(4xy - 5y^2)$

18. $(x + y + z)(x - y) - (x + y - z)(x - z) - (x - y + z)(z - y) -$
$- (z - x - y)(x + y)$

19. $(o - p - q)(p + q) + (p - o - q)(o + q) - (q - o - p)(o + p)$

20. $(xy + xz - yz)(x + y) - (xy + yz - xz)(y - z) -$
$- (xz - xy + yz)(x + z)$

21. $(6x^4 - 9x^2y + 11y^2)(8x^2 - 7y) - (13y^2 + 21x^2y - 17x^4)(11x^2 + 13y)$

22. $(64a^6b^3 + 48a^3b^5 + 36a^4b^7 + 27a^3b^9)(4a^2b - 3ab^3)$

23. $(a^2b^4x - 2a^4b^3x^4 - 3a^6b^2x^7 + a^8bx^{10})(a^3b^2x^2 - 2a^5bx^5)$

24. $3a(2b - 5a)(3b + 4a) - 4b(7a^2 - 12ab) - (5b + 4a)(3a - 6b) \cdot 4a$

25. $x^2(1 - x) + x(1 + x)(1 - 2x) - 2(2 - x)(1 - 2x + 3x^2)$

26. $9(14 + 11a + 17a^2)(10 - 12a) - 13a(15 - 19a)(17 + 20a) +$
$+ 14a^2(17a - 11) - 44a^3$

27. $2(x - 2)(x - (2 - 3x)) - 3(2 + (x - 1))(4(x - 1) - 3(x - 2))$

28. $([2x(x - 4) - 3(x - 2)(2x + 3)](4x - 2) \cdot 3 + 48x^3)(3x - 5) -$
$- 540(x^2 - 3x + 1)$

29. $3[2(y - 4) + 5][(y - 2) \cdot 3 - 2(y - 4)] -$
$- 4[7 - 3(y + 2) + y][5 - y - 3(2 - y)]$

30. $([(x - 1)(x - 2) - 2] \cdot 2 - 2(2 - x)) \cdot 2 - [2 - 2(x - 2)(1 + x) +$
$+ 2(1 - 2x)]$

Gleichungen und Ungleichungen

31. **a)** $(x - 3\tfrac{1}{7})(x + 7) = (x - \tfrac{1}{7})(x - 7)$
b) $2(x + 0{,}1)(0{,}5x + 2) - (3 + \tfrac{1}{3}x)(3x - \tfrac{1}{3}) = 0$

32. $3x(x + 7) - x(3x + 7) + 70 = 0$

33. $4x(6 - 3x) + 6x(2x + 1) = 15$

34. $(\tfrac{3}{7}x - \tfrac{7}{3}) \cdot 21x - (33x + 5) \cdot \tfrac{3}{11}x = 277$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

35. $0{,}32x(1{,}25x - 10) + (6{,}3 - 0{,}8x) \cdot 0{,}5x + 1 = 0$

36. $(x + 1)(x - 14) - (x + 1)(x - 15) = 17$

37. $(x - 16)(3x + 1) - (3x - 1)(x - 15) \leqq -35$

38. $(\frac{2}{15}x + \frac{1}{3})(25 - 3x) + (\frac{x}{6} - 15)(\frac{12}{5}x + 2) > 0$

39. $(2{,}1x - 1{,}5)(0{,}6x - 1{,}1) - (2{,}5 - 0{,}9x)(0{,}8 - 1{,}4x) + 5{,}4 \geqq 0$

40. Verlängert man in einem Quadrat ABCD die Seite [AB] über B hinaus um 2 cm, und [AD] über D hinaus um 5 cm und ergänzt zu einem Rechteck, so ist dessen Fläche um 1,22 dm^2 größer als die des Quadrats. Wie lang ist die Quadratseite?

41. Verlängert man eine Seite der Grundfläche eines Würfels um 3 cm und verkürzt die andere um 2 cm, während man die Höhe beibehält, so entsteht ein Quader gleichen Inhalts. Wie groß ist die Kantenlänge des Würfels?

um 1546

Nicolo Tartalea

Abb. 186.1 Niccolò TARTAGLIA
(1499 Brescia – 13.12.1557 Venedig)

Abb. 186.2 Simon STEVIN
(1548 Brügge – 20.2./8.4.1620 Leiden)*

* i betont. Niederländischer Mathematiker und Ingenieur. Anfänglich in der Finanzverwaltung tätig, ab 1593 Berater des Prinzen Moritz von Oranien. In seinem Buch *De Thiende* – „Der Zehnt" – (1585) behandelt er als erster systematisch die Stellenschreibweise von Zehnerbrüchen und trug damit wesentlich zur Verbreitung der Dezimalbrüche bei. Das bequeme **Komma** hat 1617 der schottische Mathematiker John NAPIER (1550–1617) eingeführt.

7.2. Binomische Formeln

Bei algebraischen Umformungen treten häufig Terme der Art $(a+b)^2$ und $(a-b)^2$ bzw. $(a+b)(a-b)$ auf. Mit Satz 182.1 können wir sie leicht berechnen:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

In allen drei Fällen waren vier Glieder zu erwarten. Sie ließen sich aber zu weniger zusammenfassen. Daher lohnt es sich, wenn du dir diese drei wichtigen Umformungen als Formeln* merkst. Man nennt sie binomische** Formeln.

Satz 187.1: Die binomischen Formeln

1. binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. binomische Formel: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Beachte: Beim Quadrieren einer Summe oder einer Differenz tritt außer den Quadraten der beiden Glieder auch noch ihr **doppeltes Produkt** auf.

Beispiele:

1) $$(\underbrace{\tfrac{1}{6}x}_{a} + \underbrace{\tfrac{3}{5}y}_{b})^2 = \underbrace{(\tfrac{1}{6}x)^2}_{a^2} + 2\cdot\underbrace{\tfrac{1}{6}x}_{a}\cdot\underbrace{\tfrac{3}{5}y}_{b} + \underbrace{(\tfrac{3}{5}y)^2}_{b^2} = \tfrac{1}{36}x^2 + \tfrac{1}{5}xy + \tfrac{9}{25}y^2$$

2) $$(\underbrace{0{,}1rs^2}_{a} - \underbrace{10r^2s}_{b})^2 = \underbrace{(0{,}1rs^2)^2}_{a^2} - 2\cdot\underbrace{0{,}1rs^2}_{a}\cdot\underbrace{10r^2s}_{b} + \underbrace{(10r^2s)^2}_{b^2} =$$
$$= 0{,}01r^2s^4 - 2r^3s^3 + 100r^4s^2$$

* Ein Gebilde der Geometrie bezeichnet EUKLID als σχῆμα (siehe Fußnote auf S. 160), das ins Lateinische als *figura* übersetzt wurde, was zu unserem Lehnwort *Figur* führte. Σχῆμα wurde aber auch mit *forma* übersetzt, das BOETHIUS zu *formula* verkleinerte, ihm dabei aber einen neuen Sinn gab. Bei LEIBNIZ (1646–1716) gewinnt *formula* dann die heutige Bedeutung von **Formel** als Ausdruck einer Gesetzmäßigkeit.

** Spezielle Summen aus zwei Summanden nannte EUKLID (4./3. Jh. v. Chr.) im Buch X seiner *Elemente* ἐκ δύο ὀνομάτων (ek dýo onomáton) = *aus zwei Namen.* GERHARD VON CREMONA (1114–1187) verwendet dafür in seiner Übersetzung der Kommentare des AL-NAYRIZI (lateinisch ANARITIUS, † um 922) zu den ersten zehn Büchern des EUKLID das Wort *binomium*. Luca PACIOLI (um 1445–1517) verallgemeinerte 1494 *binomio* zu *trinomio* und *multinomio* in seiner *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita.* Niccolò TARTAGLIA (1499–1557) kommt mit seinem *binomio* bzw. *trinomio de dignità algebratica* im 1560 postum erschienenen 2. Teil seines *General trattato di numeri, et misure* – »Allgemeine Abhandlung über Zahlen und Maße« – unserem Gebrauch schon sehr nahe. In der 1585 erschienenen *L'Arithmetique* des Niederländers Simon STEVIN (1548–1620) werden *binomie* in unserem Sinn für $a+b$ und $a-b$, *trinomie* für einen dreigliederigen Ausdruck und *multinomie* für ein allgemeines Aggregat verwendet. Letzteres setzt sich nicht durch. In der *In artem analyticem Isagoge* (1591) des François VIÈTE (1540–1603) tauchen ohne weitere Erklärung die Ausdrücke *binomia magnitudo* und *polynomia magnitudo* für eine zweigliedrige bzw. mehrgliedrige Größe auf. Sie waren anscheinend allgemeinverständlicher mathematischer Wortschatz. Im *Mathematischen Lexicon* (1716) des Christian v. WOLFF (1679–1754) liest man schließlich die Beschreibung: Binomium, Eine zweyfache Grösse wird genennet, die aus zwey Theilen bestehet, die mit dem mehr = Zeichen zusammen gesetzet werden, als a + b.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

3) $\underbrace{(1{,}5u}_{a} + \underbrace{\tfrac{1}{5}v}_{b})(\underbrace{1{,}5u}_{a} - \underbrace{\tfrac{1}{5}v}_{b}) = \underbrace{(1{,}5u)^2}_{a^2} - \underbrace{(\tfrac{1}{5}v)^2}_{b^2} = 2{,}25u^2 - \tfrac{1}{25}v^2$

Die drei binomischen Formeln waren bereits den Babyloniern um 1700 v. Chr. bekannt. Ob und wie sie sie gegebenenfalls bewiesen haben, wissen wir nicht. Der griechische Mathematiker EUKLID (4./3. Jh. v. Chr.) hat diese drei Formeln mit Zeichnungen geometrisch bewiesen. Dieser Beweis setzt allerdings voraus, daß a und b und gegebenenfalls $a-b$ positive Zahlen sind. Seine Zeichnung für die 1. binomische Formel erklärt sich praktisch von selbst:

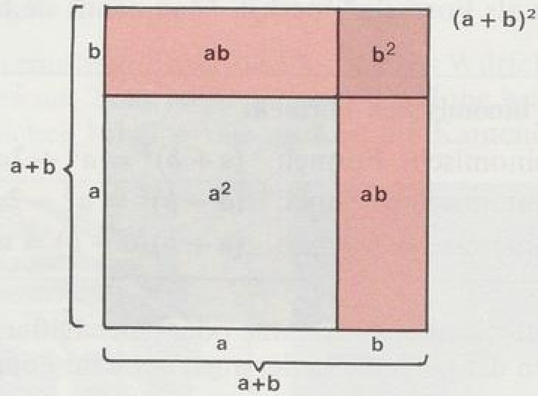


Abb. 188.1 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Auch für die beiden anderen Formeln kann man geometrische Veranschaulichungen finden. Sie sind allerdings komplizierter (vgl. Aufgabe 190/**24**).

Die 2. binomische Formel ist nur ein Sonderfall der 1. binomischen Formel, wenn man $(a-b)^2$ als $(a+(-b))^2$ schreibt. Dann gilt:

$(a+(-b))^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Genauso kann man bei anderen Vorzeichenverteilungen verfahren:

$(-a+b)^2 = ((-a)+b)^2 = (-a)^2 + 2(-a) \cdot b + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(-a-b)^2 = ((-a)+(-b))^2 = (-a)^2 + 2(-a)(-b) + (-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Aufgaben

1. **a)** $(1+x)^2$ **b)** $(x-1)^2$ **c)** $(2+x)^2$
d) $(1-2x)^2$ **e)** $(x^3-3)^2$ **f)** $(3-x^2)^2$

2. **a)** $(3a+4b)^2$ **b)** $(2x+5y)^2$ **c)** $(4x^2-9y^2)^2$
d) $(6xy+5y^2)^2$ **e)** $(7ab-9bc)^2$ **f)** $(11a^2x+13xy)^2$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

3. **a)** $(17y+3z)^2$ **b)** $(13p-7q)^2$ **c)** $(14x-11)^2$
d) $(21+15t)^2$ **e)** $(\frac{2}{3}a+1\frac{4}{5}p)^2$ **f)** $(2{,}3c-0{,}11d)^2$
g) $(9u-\frac{6}{5}v)^2$ **h)** $(1{,}8r+3\frac{3}{5})^2$ **i)** $(\frac{3}{7}a-\frac{7}{6}b)^2$
j) $(\frac{3}{5}x-3\frac{1}{3}y)^2$ **k)** $(0{,}1a^2b+10ab^2)^2$ **l)** $(\frac{3}{70}u^3-0{,}07u^4)^2$

4. **a)** $(4-x)(4+x)$ **b)** $(22x^2+33)(22x^2-33)$
c) $(1-4x^2)(1+4x^2)$

5. **a)** $(5a-4x)(5a+4x)$ **b)** $(17x^2-19y^2)(17x^2+19y^2)$

6. **a)** $(16x+24y)(16x-24y)$
b) $(12p-23q)(12p+23q)$
c) $(7\frac{1}{3}+2\frac{4}{7}z)(-7\frac{1}{3}+2\frac{4}{7}z)$
d) $(-0{,}25u+0{,}07v)(-0{,}25u-0{,}07v)$

7. **a)** $(a+b)(-a+b)$ **b)** $(a-b)(-a-b)$
c) $(x-y)(-x+y)$ **d)** $(-x-y)(x+y)$

8. **a)** Beweise die Formel von BRAHMAGUPTA (598–nach 665):
$n^2=(n+a)(n-a)+a^2$
b) Diese Formel wurde von den Indern zur Berechnung von Zahlenquadraten verwendet; z. B.
$297^2=(297+3)(297-3)+3^2=300\cdot 294+9=88\,209.$
Berechne ebenso:
1) 98^2 **2)** 395^2 **3)** 1999^2 **4)** 2001^2 **5)** 9999^2

9. Beweise die Formel von NARAYANA (um 1350):
$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

10. Die folgende Formel wurde auf einer altbabylonischen Tontafel aus dem 17. Jh. v. Chr. gefunden. Beweise sie!
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab$$

11. Beweise die Formeln
a) $(x+y)^2+(x-y)^2+(-x+y)^2+(-x-y)^2=4(x^2+y^2)$
b) $\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{2}=x^2+y^2$

12. **a)** $(3uv-2v^2)^2$ **b)** $(7a^2b+4ab^2)(7a^2b-4ab^2)$
c) $(x^6+y^3)^2$ **d)** $(8a^2b^2-5c^4)(5c^4-8a^2b^2)$
e) $(1\frac{6}{7}p^2qr^3-1)^2$ **f)** $(1{,}9c^5d-\frac{7}{8}d^3e^2)(\frac{7}{8}d^3e^2+1{,}9c^5d)$

13. Berechne $(a+b)^2-(a-b)^2$ auf zwei Arten.

14. Bestimme die Werte von $(a+b)^2$ und a^2+b^2 für
$a=7$ $(-4;\ 21;\ -4\frac{1}{6};\ \frac{14}{5})$ und $b=3$ $(11;\ -21;\ -\frac{4}{3};\ -2{,}8)$.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

15. $(2-x)^2-(2-x)(2+x)+(2+x)^2$

16. $(4a+3x)^2+3(4a+5x)(3a-2x)-4(3a-4x)^2$

17. $(3a^2-16ax)^2-4ax(7a-2x)(5x-4a)-6a^2(2x-3a)(2x+3a)$

18. $17a^3-3b(11a+7b)(7b-11a)+2a(11b-7a)^2-$
$-(11b-7a)(11b-6a)\cdot 3b$

19. $x^4+2x^2(x-1)^2-3x(x^2-x+1)(x+1)-(x^2-2x+1)(1+x)(1-x)$

20. $(x^2-y^2)^2+x(x-y)^2(x-y)-y(x-y)^2(x+y)+xy(x+2y)(2x-y)$

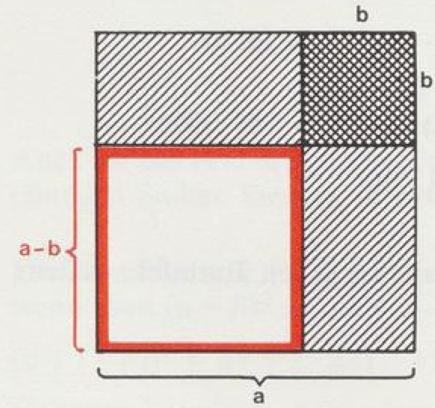
21. $(a+1)^2\cdot 2a-a(a+1)(1-a)^2+2(a-1)(a+1)^2+$
$+a(a^2+2a+1)(a-1)$

•**22.** $[(x+y)+z][(x+y)+z]-[(x-y)-z][(x-y)-z]+$
$+[(y-x)-z][(y-x)-z]-[x+(y+z)][(y+z)+x]$

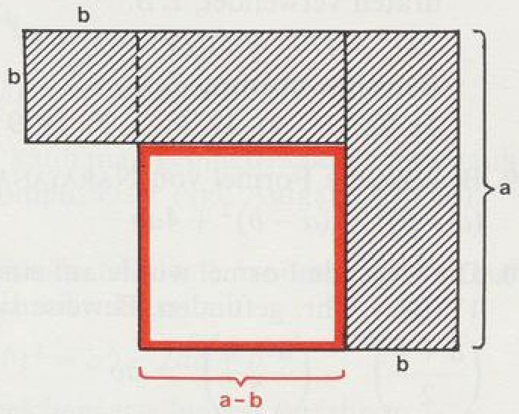
23. $[(\frac{2}{3}a-\frac{3}{2}b)+1][(\frac{2}{3}a-\frac{3}{2}b)+1]$

24. Welche Formeln werden durch die Abbildungen veranschaulicht? Begründung!

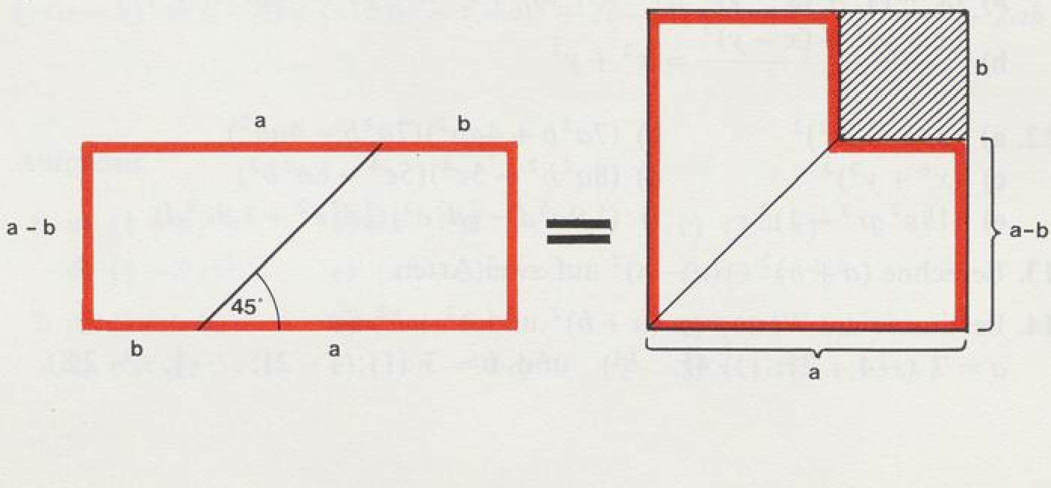
a)



b)



c)



• **25.** $(\frac{9}{5}a + \frac{5}{2}b)(\frac{5}{2}b - \frac{9}{5}a) - (\frac{3}{2}b + \frac{4}{5}a)^2 - (\frac{3}{2}b - \frac{4}{5}a)^2$

• **26.** $2(0{,}4 - 0{,}3x)^2 - 0{,}4(1 + 2x)^2 - 3(x - 0{,}2)(0{,}2 - x)$

27. Quadrieren zweistelliger Zahlen:
Beispiel:
$34^2 = (4 + 3 \cdot 10)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 10 + 3^2 \cdot 100$, also:

16	(16 = Quadrat der Einerziffer)	**6**	an, **1** gemerkt
240	(24 = doppeltes Produkt der Ziffern)	**4** + **1** = 5	an, **2** gemerkt
900	(9 = Quadrat der Zehnerziffer)	**9** + **2** = 11	an
$34^2 = 1156$		1156	

Berechne so die Quadrate der Zahlen:

a) 59; 26; 94; 73; 88; 47; 65; 31

b) 2,9; 6,7; 0,48; 0,038; 550; 0,00093

c) $\frac{41}{32}$; $\frac{82}{19}$; $\frac{54}{53}$; $\frac{71}{99}$; $\frac{1{,}8}{23}$; $\frac{670}{1{,}2}$; $\frac{0{,}85}{0{,}044}$

28. Umwandlung eines Produkts in die Form $(a + b)(a - b)$:
Beispiele:

$$53 \cdot 47 = (50 + 3)(50 - 3) = 50^2 - 3^2 = 2500 - 9 = 2491$$
$$24 \cdot 26 = (25 - 1)(25 + 1) = 25^2 - 1^2 = 625 - 1 = 624$$

Berechne so folgende Produkte:

a) $29 \cdot 31$; $65 \cdot 55$; $23 \cdot 27$; $72 \cdot 88$

b) $99 \cdot 101$; $498 \cdot 502$; $243 \cdot 257$; $1012 \cdot 988$

c) $3{,}8 \cdot 42$; $0{,}74 \cdot 6{,}6$; $\frac{58}{75} \cdot \frac{62}{85}$; $\frac{49}{58} \cdot \frac{49}{62}$

29. Das Quadrat einer Zahl mit der Einerstelle 5, zum Beispiel 65, berechnet Peter folgendermaßen:
»$6 \cdot (6 + 1) = 6 \cdot 7 = 42$; 25 angehängt; Ergebnis 4225.«
Er erhält also den richtigen Wert von 65^2.
Prüfe dieses Verfahren an einigen ähnlichen Beispielen. Beweise, daß man nach dieser Methode das Quadrat jeder Zahl mit der Einerstelle 5 berechnen kann. (Tip: Schreibe die Zahl als Summe mit 5 als zweitem Summanden und wende die Formel für $(a + b)^2$ an.)

Gleichungen und Ungleichungen

30. $(2x + 3)(2x - 3) = (2x + 3)^2$

31. $(x + 3)^2 + 2(2x + 1)(2x - 1) = (5 - 3x)^2$

32. $(x - 3)^2 - x^2 = 3 - 3(x + 2)$

33. $(x + 1)^2 > (x + 1)(x - 1) + x + 7$

34. $(x - 1)^2 \leqq x^2 - 2$

35. $(x+2)^2-(x-4)^2 \geqq 2(x-4)+9x$

36. $(x-3)^2+(x+1)^2+3x+5<2(x-1)(x+1)+2$

37. $(x+1)^2-(x+2)^2=(x+3)^2-(x+4)^2$

38. $(x+3)(x-3)+(x+3)^2=(x-3)(x+3)+(x-3)^2$

39. $(2x-1)^2+x^2=(3x+1)^2-(2x-5)^2$

40. $x^2-1+(x-1)^2+(x-1)(x+1)>3x^2-2x$

41. Verkleinert man die Seiten eines Quadrats um je 10 m, so entsteht ein um 1,4 a kleineres Quadrat. Wie lang ist die Seite des ursprünglichen Quadrats?

42. Die eine Seite eines Rechtecks ist um 5 cm größer als die andere. Die Fläche ist um 64 cm^2 kleiner als die Fläche eines Quadrats, dessen Seite um 4 cm größer als die kleinere Rechtecksseite ist. Berechne die Seiten des Rechtecks.

43. Wenn in einem Quadrat die eine Seite um 2 cm verkleinert und die andere um ebensoviel vergrößert wird, so erhält man ein ebenso großes Rechteck wie bei Verkürzung der einen Quadratseite um 4 cm und Verlängerung der anderen um 10 cm. Wie groß ist die Quadratseite?

44. Der Inhalt eines Rechtecks, dessen Seiten sich um 11 cm unterscheiden, ändert sich nicht, wenn man die größere Seite um 6 cm verkleinert und die kleinere um 5 cm vergrößert. Berechne Länge und Breite des ursprünglichen Rechtecks.

45. Wird bei einem Würfel die erste Kante um 2 dm vergrößert und die zweite um ebensoviel verkleinert, während man die dritte beibehält, so entsteht ein Quader, dessen Volumen um 12 dm^3 kleiner ist als dasjenige des Würfels. Wie lang ist die Würfelkante?

46. Bei einem Quader ist die zweite Kante um 1 cm größer als das Doppelte der ersten, die dritte um 2 cm kleiner als die zweite. Der Rauminhalt dieses Quaders ist um 5 cm^3 kleiner als das vierfache Volumen eines Würfels, dessen Kante mit der ersten Quaderkante übereinstimmt. Berechne die Kanten des Quaders.

47. Vergrößert man bei einem Würfel alle Kanten um 1 dm, so nimmt seine Oberfläche um 0,3 m^2 zu. Wie groß ist der Rauminhalt dieses Würfels?

7.3 Quadrate von Aggregaten

Analog zum **Binom** als zweigliedrigem Aggregat $a + b$ bezeichnet man mit dem Kunstwort **Trinom** ein dreigliedriges Aggregat der Form $a + b + c$. Quadriert man dieses Trinom, so erwartet man $3 \cdot 3 = 9$ Glieder, von denen man wie beim Quadrat eines Binoms hoffen kann, daß sich einige zusammenfassen lassen. Wir probieren es:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b+c)(a+b+c) = \\ &= a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2 = \\ &= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.\end{aligned}$$

Das Ergebnis des Quadrierens eines Trinoms entspricht dem Ergebnis des Quadrierens eines Binoms, also der 1. binomischen Formel; man erhält nämlich die Summe aller Quadrate und die Summe aller möglichen doppelten Produkte.
Besteht nun ein Aggregat aus mehr als 3 Summanden, so ergeben sich beim Quadrieren wieder alle Quadrate und alle möglichen doppelten Produkte, da jedes Produkt mit zwei verschiedenen Faktoren genau zweimal auftritt. Die Pfeile sollen es dir zeigen:

$$a \cdot b$$

$$(a+b+c+\ldots+z)(a+b+c+\ldots+z) =$$

$$a \cdot b$$

$$\ldots$$

$$= a^2+b^2+c^2+\ldots+z^2+2ab+2ac+\ldots+2az+2bc+\ldots$$

Kommen im Aggregat nicht nur Plus-, sondern auch Minuszeichen vor, dann muß man bei der Bildung der doppelten Produkte die Vorzeichenregeln beachten. Wir zeigen es dir an

$$\begin{aligned}(a-b+c)^2 &= (a-b+c)(a-b+c) = \\ &= a^2-ab+ac-ab+b^2-bc+ac-bc+c^2 = \\ &= a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc.\end{aligned}$$

Wir fassen die gewonnenen Erkenntnisse zusammen in

> **Satz 193.1:** Das Quadrat eines Aggregats besteht aus der Summe der Quadrate aller seiner Glieder und der Summe aller möglichen doppelten Produkte unter Berücksichtigung der Vorzeichenregeln.

Beachte: Damit du kein doppeltes Produkt vergißt, mußt du systematisch vorgehen. Du beginnst am besten vorne und arbeitest dich nach hinten durch, wie es dir die Pfeile zeigen:

1. Schritt

$$(a+b+c+d+\ldots)^2$$

2. Schritt

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Dazu ein

Beispiel:

$$(-\tfrac{3}{2}x+2y-xz-4)^2 =$$
$$= \tfrac{9}{4}x^2+4y^2+x^2z^2+16-6xy+3x^2z+12x-4xyz-16y+8xz$$

Kehren wir zurück zu $(a+b+c)^2$. Wir hätten das Quadrat auch anders als oben ausrechnen können, nämlich mit Hilfe der 1. binomischen Formel. Dazu müßte man beispielsweise $a+b$ mittels einer Klammer zusammenfassen:

$$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 =$$
$$= (a+b)^2+2(a+b)c+c^2 =$$
$$= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2 =$$
$$= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\,.$$

Einen kleinen Vorteil bringt dieses Verfahren, da wir keine 9 Produkte ausrechnen mußten. Aber Satz 193.1 ist natürlich am schnellsten.
Einen großen Vorteil bringt der Trick des Klammerns aber, wenn man ein Produkt von zwei Aggregaten dadurch auf eine Form bringen kann, bei der sich die 3. binomische Formel anwenden läßt.

Beispiel 1:

$$(2a+3b+4c)(2a+3b-4c) =$$
$$= [(2a+3b)+4c][(2a+3b)-4c] =$$
$$= (2a+3b)^2-(4c)^2 =$$
$$= 4a^2+12ab+9b^2-16c^2\,.$$

Beispiel 2:

$$(2a-3b+4c)(2a+3b-4c)$$

Das sieht recht schwierig aus! Zwar kann man in der zweiten Klammer $3b-4c$ zusammenklammern. Was soll aber in der ersten Klammer geschehen? Wir bräuchten ebenfalls $(3b-4c)$, aber ein Minuszeichen davor.
Satz 106.2 macht's möglich:

$$(2a-3b+4c)(2a+3b-4c) =$$
$$= [2a-(3b-4c)][2a+(3b-4c)] =$$
$$= (2a)^2-(3b-4c)^2 =$$
$$= 4a^2-(9b^2-24bc+16c^2) =$$
$$= 4a^2-9b^2+24bc-16c^2$$

Aufgaben

1. **a)** $(u+v+w)^2$ **b)** $(u+v-w)^2$ **c)** $(u-v-w)^2$ **d)** $(-u-v-w)^2$
2. **a)** $(3x+5y+1)^2$ **b)** $(2x+3y+4z)^2$
   c) $(2x-3y+4z)^2$ **d)** $(0{,}7a-1{,}1b-0{,}9c)^2$
   e) $(5x^2-3y-1)^2$ **f)** $(1\tfrac{3}{5}a-2\tfrac{2}{3}b+1\tfrac{1}{4}c)^2$
   g) $(0{,}8x-1{,}2y+1{,}6xy)^2$ **h)** $(0{,}1x-0{,}2xy+0{,}3y)^2$

3. **a)** $(u+v+w)^2+(v-u+w)^2$
b) $(2a-4b+6c)^2-(-8a+b+2c)^2$
c) $100(0{,}4r+0{,}3s-\frac{1}{2}t)^2-4(2a+\frac{3}{2}b-2{,}5c)^2$

4. Stelle die Formel für $(a+b+c)^2$ durch eine Zeichnung dar.

5. **a)** $(5u-8v+6w-2)^2$ **b)** $(3x^3-2x^2+x-1)^2$
•**c)** $(17a^2-14ab+13b^2-11b)^2$ •**d)** $(1{,}2x^2+1{,}3y^2-0{,}25x-0{,}15y)^2$
•**e)** $(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}b^2-\frac{3}{4}a+\frac{2}{3}b)^2$

6. **a)** $(u+v+w)(u+v-w)$ **b)** $(u+v+w)(u-v-w)$
c) $(u-v+w)(u+v-w)$ **d)** $(2p+q+7r)(2p+q-7r)$
e) $(\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}y+z)(\frac{3}{2}x+\frac{2}{3}y-z)$ **f)** $(0{,}5a-\frac{1}{3}b-2c)(2c-\frac{1}{3}b-0{,}5a)$

7. **a)** $(a+b+c)(a+b-c)$ **b)** $(a+b-c)(a-b+c)$

8. **a)** $(1-x-y)(1+x+y)$ **b)** $(1-x+x^2)(1-x-x^2)$

•**9.** **a)** $(7a-9x+11y^2)(7a+9x-11y^2)$
b) $(6x^2-13y^2+15xy)(6x^2-13y^2-15xy)$

•**10.** **a)** $(9ax^2-11a^2+4x^4)(9ax^2+11a^2-4x^4)$
b) $(9ax^2+11a^2+4x^4)(9ax^2-11a^2+4x^4)$

•**11.** **a)** $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$
b) $(1-x-x^2+x^3)(1-x+x^2-x^3)$

•**12.** **a)** $(8x^3+7x^2y+6xy^2-5y^3)(8x^3+7x^2y-6xy^2+5y^3)$
b) $(19a^6b-4a^4b^2-5a^2b^3-18b^4)(19a^6b-4a^4b^2+5a^2b^3+18b^4)$

••**13.** **a)** $(a-2b+2c-x)(a-2b-2c+x)$
b) $(x^2-2+y^2-b)(x^2-y^2-b+2)$

••**14.** **a)** $(b^2-x+a^2-y)(a^2+y-x-b^2)$
b) $(x+1-x^2-x^3)(1-x^2+x^3-x)$
c) $(1-a-x-ax)(a-x+ax+1)$
d) $(a^3+ab^2-a^2b-b^3)(b^3-ab^2-a^2b+a^3)$

** 7.4 Höhere Potenzen von Binomen

In manchen komplizierteren Rechnungen kommen nicht nur Quadrate, sondern auch höhere Potenzen von Binomen vor. Auch für sie kennt der Mathematiker Formeln, die den Umgang mit ihnen erleichtern. Betrachten wir zunächst die dritte Potenz $(a+b)^3$. Nach Definition der Potenz müßtest du $(a+b)(a+b)(a+b)$ rechnen, was zunächst 8 Summanden lieferte. Geschickter ist die Anwendung der 1. binomischen Formel:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2) = \\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 = \\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

Statt der 8 Summanden enthält das Ergebnis nur noch 4!

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Auch für $(a-b)^3$ können wir eine solche Rechnung durchführen. Einfacher geht's, wenn wir in dem Ergebnis von eben $(-b)$ statt b setzen:

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a+(-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.\end{aligned}$$

Wegen des häufigen Vorkommens lohnt es sich, diese Ergebnisse als Formeln auswendig zu lernen:

Satz 196.1: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Beispiel:

$$\begin{aligned}(3x-5y)^3 &= 27x^3 - 3\cdot 9x^2\cdot 5y + 3\cdot 3x\cdot 25y^2 - 125y^3 = \\ &= 27x^3 - 135x^2y + 225xy^2 - 125y^3.\end{aligned}$$

Durch eine räumliche Darstellung läßt sich die erste dieser Formeln auch mit Quadern veranschaulichen.

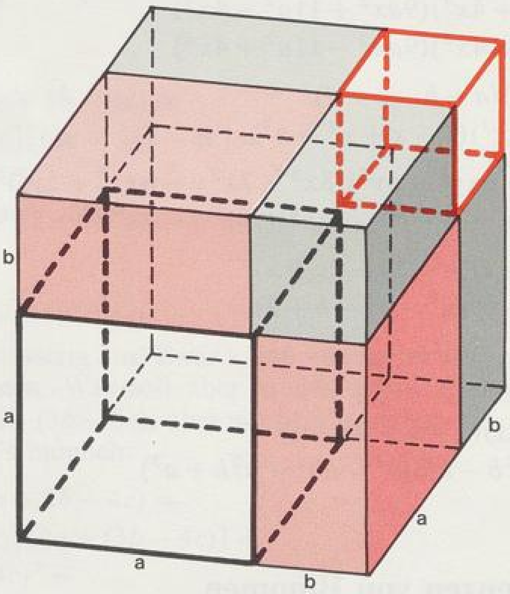


Abb. 196.1 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Die Mathematiker gaben sich natürlich nicht mit den Formeln für die Quadrate und die dritten Potenzen zufrieden und untersuchten auch höhere Potenzen des Binoms $(a+b)$. Diese höheren Potenzen lassen sich schrittweise auf niedrigere zurückführen und damit berechnen. Wir führen dies für $(a+b)^4$ einmal vor:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3 = \\ &= (a+b)(1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3) = \\ &= 1a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + 1ab^3 + \\ &\quad + 1a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + 1b^4 = \\ &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4.\end{aligned}$$

Das Koeffizientenmuster 1 – 3 – 3 – 1 wiederholt sich beim Ausmultiplizieren, um eine Stelle verschoben, in der zweiten Zeile. Das neue Koeffizientenmuster 1 – 4 – 6 – 4 – 1 ergibt sich somit recht einfach, indem man nebeneinanderstehende Koeffizienten des vorhergehenden Musters 0 – 1 – 3 – 3 – 1 – 0 addiert. Setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man eine dreieckige Anordnung von Koeffizienten. Sie ist auch als **Arithmetisches Dreieck** oder **PASCAL-STIFELsches Dreieck** bekannt.

	1	
$(a+b)^1$	1 1	$1a + 1b$
$(a+b)^2$	1 2 1	$1a^2 + 2ab + 1b^2$
$(a+b)^3$	1 3 3 1	$1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1	$1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1	$1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$
....	....	....

Das Arithmetische Dreieck war bereits den Indern des 2. vorchristlichen Jh.s und den Arabern des 11. Jh.s bekannt. Die früheste erhaltene Darstellung dieses Dreiecks enthält die *Untersuchung der Arithmetischen Regeln der Neun Bücher* von YANG Hui aus dem Jahre 1261, die auf den chinesischen Mathematiker QIA Hsian [sprich: Tschia Hsien] (um 1100) zurückgeht (siehe Abbildung 197.1). Die erste gedruckte Darstellung in Europa schmückt das Titelblatt des *Neuen Rechenbuchs* von 1527 des Peter APIAN (1495–1552) (siehe Abbildung 197.2). Benannt ist das Arithmetische Dreieck nach dem deutschen Mathematiker Michael STIFEL (1487–1567) und dem französischen Mathematiker und Philosophen Blaise PASCAL (1623–1662), die die interessanten Eigenschaften dieses Dreiecks erforscht haben.

Abb. 197.1 Das Arithmetische Dreieck des YANG Hui (1261)

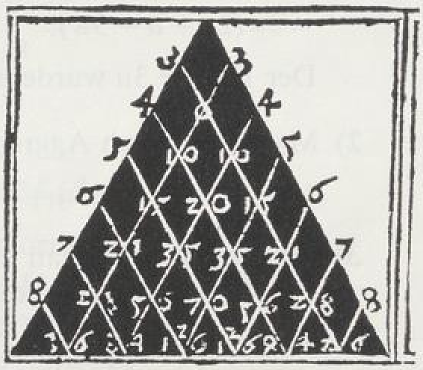


Abb. 197.2 Das Arithmetische Dreieck des Peter APIAN (1527)

Aufgaben

1. **a)** $(2x+1)^3$ **b)** $(1-3a)^3$ **c)** $(2a+5b)^3$
d) $(3a-5b)^3$ **e)** $(-a+4b)^3$ **f)** $(-a-2b)^3$

UNIVERSITÄTS-BIBLIOTHEK PADERBORN

2. **a)** $(0{,}1+u)^3$ **b)** $(-1{,}2r+5s)^3$ **c)** $(1\frac{1}{2}a+1\frac{1}{3}b)^3$

3. **a)** $(\frac{1}{2}ab+\frac{2}{3}a)^3$ **b)** $(\frac{5}{7}x-2\frac{4}{5}x^2)^3$ **c)** $(0{,}2x-0{,}5y)^3$

4. **a)** $(xy^2+2x^2y)^3$ **b)** $(\frac{5}{9}a^3b^2-\frac{3}{5}a^2b^3)^3$

5. Berechne $(a+b)^5$ auf zwei Arten, einmal als $(a+b)(a+b)^4$ und einmal als $(a+b)^2(a+b)^3$.

6. **a)** $(2a+1)^4$ **b)** $(x-3y)^5$ **c)** $(x-y)^7$

7.5 Die Kunst des Faktorisierens

7.5.1 Einfaches Ausklammern

Beim weiteren Eindringen in die Mathematik im Laufe der nächsten Jahre wirst du feststellen, daß man mit Produkten viel mehr anfangen kann als mit Summen. Daher mußt du Bescheid wissen, wie man Aggregate in Produkte verwandeln kann. Dieses Verwandeln nennt man auch **Faktorisieren** eines Aggregats.
Die einfachste Art des Faktorisierens kennst du bereits als eine Anwendung des verallgemeinerten Distributivgesetzes (Satz 90.2) in der Form des Ausklammerns. Wir vertiefen deine Kenntnisse durch einige

Beispiele:

1) $6uv+3u^2-9uw=$
$=3u\cdot 2v+3u\cdot u-3u\cdot 3w=$
$=3u(2v+u-3w).$

Der Faktor $3u$ wurde ausgeklammert.

2) Man kann auch Aggregate ausklammern:

$3(a+b)-a(a+b)+4b^2(a+b)=(a+b)(3-a+4b^2).$

3) Manchmal muß man ein Glied des Aggregats erst in ein Produkt umschreiben, indem man den Faktor 1 hinzufügt:

$3a^2+a=$
$=a\cdot 3a+a\cdot 1=$ **Trick:** $\boldsymbol{a=a\cdot 1}$
$=a(3a+1).$

4) Mit Gewalt kann man jeden gewünschten Faktor ausklammern! Wir wollen aus dem Aggregat $\frac{2}{3}x^2-7xy+x$ den Term $\frac{1}{3}x$ ausklammern, damit in der Klammer keine Brüche mehr vorkommen.

$\frac{2}{3}x^2-7xy+x=$
$=\frac{1}{3}x\cdot 2x-\frac{1}{3}x\cdot 21y+\frac{1}{3}x\cdot 3=$
$=\frac{1}{3}x(2x-21y+3).$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

5) Besonders aufpassen mußt du, wenn du in Potenzen von Aggregaten ausklammerst.

$$\begin{aligned}&(8a^2b-12a)^2 =\\&= (4a[2ab-3])^2 =\\&= (4a)^2(2ab-3)^2 =\\&= 16a^2(2ab-3)^2.\end{aligned}$$

Mit einiger Übung kannst du bald auf die 2. Zeile unserer Beispiele verzichten, indem du im Kopf jeden Summanden durch den auszuklammernden Term dividierst. Das mußt du aber üben! Dazu dienen die

Aufgaben

1. **a)** $3st-4s^2+s$ **b)** ax^2+bx+x
c) $4a^2-8a^2+12a^5$ **d)** $\frac{4}{5}ay+\frac{3}{10}by-\frac{2}{15}y^2$

2. **a)** $\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}b$ **b)** $1\frac{1}{5}x-\frac{6}{5}y+1{,}2z$
c) $\frac{3}{8}u-\frac{15}{32}v$ **d)** $-\frac{111}{46}s-\frac{74}{69}t$

3. Faktorisiere so, daß in der Klammer keine Bruchzahl mehr steht.
a) $\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}y$ **b)** $0{,}4a-0{,}5b$
c) $\frac{1}{2}r+\frac{3}{2}s-t$ **d)** $-0{,}01u+0{,}1v+w$
e) $1\frac{1}{3}+1\frac{1}{4}x-1\frac{1}{5}z$ **f)** $-1{,}2a+\frac{2}{3}b-1$

4. **a)** $abc-acd$ **b)** $a^2b+ab^2-a^2b^2$
c) $x^4-x^3+x^2$ **d)** $u^2v^3+uv^4-uv^5$

5. **a)** $6uv+6uw-3uz$ **b)** $3\frac{1}{3}p-6\frac{2}{3}p^2q$
c) $-\frac{7}{8}x^4-\frac{56}{3}x^3$ **d)** $1\frac{15}{34}u^2v^3z-2\frac{5}{17}u^3vz^5$

6. Berechne im Kopf nach geeigneter Faktorisierung.
a) $13\cdot 9+13$ **b)** $7\cdot 18+13\cdot 18$
c) $2{,}9\cdot 18-1{,}9\cdot 18$ **d)** $27^2-17\cdot 27$
e) $\frac{17}{49}\cdot 83+2\frac{32}{49}\cdot 83$ **f)** $13^2+3\cdot 13-16\cdot 13$

•**7.** **a)** $108xy-162x+216y$
b) $2\frac{4}{5}xy^4z^2-2x^2y^2z^2-4\frac{2}{5}x^3y^2z+1\frac{3}{5}xy^2z^2-3\frac{3}{5}x^2y^3z$

•**8.** **a)** $21u^4-7u^3+23\frac{1}{3}u^2$
b) $1{,}3x^3y+2{,}35x^2y^2-0{,}9xy^3$

9. Klammere 3 aus.
a) $18a^2-273b$ **b)** $9x+4$
c) $1-12x$ **d)** $a-1$

10. Klammere -1 aus.
a) $-3a^2 + b^2$ **b)** $3 - 5x$ **c)** $-1 - 8ab$ **d)** $3a^2b + 5x$

11. Klammere $-\frac{2}{3}$ aus.
a) $\frac{4}{3}a - 4\frac{2}{3}b$ **b)** $8a - \frac{2}{3}$ **c)** $-1 - \frac{3}{2}b$ **d)** $2x + 3y$

12. a) $u(v+w) - v(v+w) + w(v+w)$
b) $x(a+b-c) - y(c-a-b) + z(a-c+b)$
c) $m(2a-3b) + n(3b-2a) - p(-3b+2a)$
d) $u(2e-f) - 3v(4e-2f) + w(3f-6e)$

13. a) $\frac{3}{4}x(a-b) - \frac{21}{28}y(a-b)$ **b)** $3{,}2a(x-3) + 4{,}8b(x-3)$
c) $14x(3y+2z) - 28y(3y+2z)$

14. a) $12a^2b^3(7x-1) + 84ab^4(7x-1)$
b) $6a^3(1-x) - 27ab^2(x-1)$
c) $\frac{7}{4}x^2y(3x-y) + 7xy^2(y-3x)$
d) $1{,}2a^2(x-y) + 8{,}4ab(x-y) - 0{,}72b^2(y-x)$

15. a) $x(a+b) + a + b$ **b)** $x(a-b) + a - b$
c) $x(a-b) - a + b$ **d)** $x(a+b) + a - b$

16. a) $(2\frac{1}{2}x - y)(2\frac{1}{2}a - b) - (1\frac{1}{2}x + y)(\frac{5}{2}a - b)$
•b) $(3{,}7a^2b + c)(7{,}3ab^2 - c) + (3{,}7a^2b + c)(2{,}7ab^2 + c)$

17. a) $4x^2y^2z - 6xyz^2 + 10x^2y^2z^2$
b) $3a^8b^{12}c^{13} + 27a^7b^{15}c^9 - 18(abc)^{11}$
c) $a^3(-b)^4 - (-a)^4b^3 + (-a)^5(-b)^5$
d) $(x+y)^2(x^2+y^2) - (x+y)(x^3+y^3)$

7.5.2 Mehrfaches Ausklammern

In manchen Fällen gelingt ein Faktorisieren auch dann, wenn kein *allen* Gliedern gemeinsamer Faktor vorhanden ist, indem man zunächst aus geeigneten *Teilaggregaten* einen gemeinsamen Faktor heraussetzt.
Dabei gibt es oft mehrere Möglichkeiten des Vorgehens.

Beispiele:

1) Faktorisiere $ax - ay + bx - by$.

1. Möglichkeit:
$\underline{ax - ay} + \underline{bx - by} =$
$= a(x-y) + b(x-y) =$
$= (x-y)(a+b)$

2. Möglichkeit:
$\underline{ax} - \underline{ay} + \underline{bx} - \underline{by} =$
$= x(a+b) - y(a+b) =$
$= (a+b)(x-y)$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

2) $au + b - bv + av - bu - a =$
$= (au + av - a) + (b - bv - bu) =$
$= a(u + v - 1) + b(1 - v - u) =$
$= a(u + v - 1) - b(u + v - 1) =$
$= (u + v - 1)(a - b)$

3) $6a^2b - 3ab^2 - 2a + b =$
$= 3ab(2a - b) - 2a + b =$
$= 3ab(2a - b) - (2a - b) =$
$= (2a - b)(3ab - 1)$

Aufgaben

1. **a)** $ax + ay + bx + by$ **b)** $xs - ys + xt - yt$
c) $ab + ac - bx - cx$ **d)** $xz - yz - ax + ay$

2. **a)** $2ux + 3vy + 2uy + 3vx$ **b)** $ab + c + b + ac$
c) $x^2 + ax + ab + bx$ **d)** $x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1$

3. **a)** $mx + ny + nx + my + rx + ry$ **b)** $ap - bp - aq + bq + az - bz$
c) $ar + br + cr - a - b - c$ **d)** $eh + fh - gh - ei - fi + gi$

4. **a)** $ax - cx + 2a + 2b + bx - 2c$ **b)** $pu - pv + ru - qv - rv + qu$
c) $x - y - xz + yz - 1 + z$ **d)** $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5$

5. **a)** $3{,}3ax + 3{,}3ay - 4{,}4bx - 4{,}4by$
b) $0{,}7pq - 0{,}9pr + 0{,}7qs - 0{,}9rs$
•**c)** $4{,}2uv + 3{,}5uw + 2w + 2{,}4v$
•**d)** $-8ax^2 + 9bx^2 - 3{,}6by^2 + 3{,}2ay^2$

6. **a)** $7ax + 3ay - \frac{7}{5}bx - \frac{3}{5}by$
b) $az^2 + \frac{3}{2}axz + \frac{5}{7}bz^2 + \frac{15}{14}bxz$
c) $0{,}2xyz - 0{,}3uxy - 0{,}6y^2z + 0{,}9uy^2$
d) $uv^3 - \frac{1}{4}uv^2 + \frac{3}{2}av^3 - \frac{3}{8}av^2$

7. **a)** $ax - 7bx + 4ay - 28by$
b) $12ax - 2ay - 18bx + 3by$
c) $x(a + b - c) - y(a + b - c) + (x - y)$
d) $y(a - b - c) + x(b + c - a) + (x - y)$

•**8.** **a)** $(a + 2b)(3ux - vy) - (uy - 3vx)(a + 2b)$
b) $(7xz - 3y)(3a + 4b) - (3a + 4b)(yz - 21x)$
c) $(2st - 3ru)(5p - q) + (3rt - 2su)(5p - q)$
d) $(7d - 2)(10eg - 2fh) + (2 - 7d)(5eh - 4fg)$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

9. a) $64au + 36eu + 64ax + 36ex - 44bu - 44bx$

b) $24ap + 54aq - 36bp - 81bq + 60cp + 135cq$

• c) $\frac{1}{3}ay^2 - \frac{1}{2}by^2 + \frac{4}{3}ay - \frac{1}{3}a - 2by + \frac{1}{2}b$

• d) $\frac{1}{2}r^3sv - \frac{7}{10}r^2s^2v + \frac{7}{15}r^2s^2u - \frac{1}{3}r^3su + \frac{1}{5}r^4u - \frac{3}{10}r^4v$

7.5.3. Faktorisieren mit Hilfe der binomischen Formeln

Schreibt man die binomischen Formeln von Satz 187.1 in der Form

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ bzw. $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ bzw.
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$,

so kann man gewisse Aggregate mit ihrer Hilfe auch faktorisieren.

Beispiel 1:

$$u^2 + 12u + 36 =$$
$$= \underset{a}{u}^2 + 2 \cdot \underset{a}{u} \cdot \underset{b}{6} + \underset{b}{6}^2 = (u+6)^2$$

Beispiel 2:

$$16x^4 - 8x^2y^3 + y^6 =$$
$$= (\underbrace{4x^2}_{a})^2 - 2 \cdot \underbrace{4x^2}_{a} \cdot \underbrace{y^3}_{b} + (\underbrace{y^3}_{b})^2 = (4x^2 - y^3)^2$$

Merke: Bestimme zunächst die beiden Glieder, deren Quadrate im gegebenen Ausdruck vorkommen, und prüfe anschließend, ob ihr doppeltes Produkt mit dem entsprechenden Glied des gegebenen Aggregats übereinstimmt.

Beispiel 3:

$$(3x + 7y)^2 - 25x^2 =$$
$$= (\underbrace{3x + 7y}_{a})^2 - (\underbrace{5x}_{b})^2 = (3x + 7y + 5x)(3x + 7y - 5x) =$$
$$= (8x + 7y)(7y - 2x)$$

Eine *Differenz* zweier Quadrate läßt sich *stets* in ein Produkt verwandeln. Dagegen ist dies bei einer *Summe* zweier Quadrate *nicht* möglich.* Bei 3. Potenzen dagegen lassen sich sowohl die Differenz wie auch die Summe faktorisieren. Es gilt nämlich:

* Produktzerlegungen von der Form $x^2 + y^2 = 1 \cdot (x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2) = \dots$ usw., die immer möglich sind, interessieren in diesem Zusammenhang natürlich nicht.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Satz 203.1: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 - ab + b^2)$

Die Richtigkeit dieser Formeln siehst du sofort ein, wenn du die rechten Seiten ausmultiplizierst (Aufgabe 204/**16**).

Beispiel 4:

$$0{,}027x^3 + 1000y^3 = (0{,}3x + 10y)(0{,}09x^2 - 3xy + 100y^2)$$

Aufgaben

1. **a)** $x^2 - 8x + 16$ **b)** $u^2 - 6uv + 9v^2$
c) $4z^2 + 4pz + p^2$ **d)** $49p^2 - 112pq + 64q^2$
e) $9y^4 + 30y^2 + 25$ **f)** $x^{10} + 4x^5 + 4$

2. **a)** $a^2 + a + \frac{1}{4}$ **b)** $-84a + 9a^2 + 196$
c) $0{,}16x^6 - 0{,}24x^3y + 0{,}09y^2$ **d)** $2{,}25 - 3x + x^2$
e) $0{,}36r^2 - 4{,}8rs + 16s^2$ **f)** $4x^2 + 52x + 169$

•**3.** **a)** $\frac{4}{9}s^2 + \frac{16}{15}st + \frac{16}{25}t^2$ **b)** $\frac{9}{16}u^2 - \frac{5}{4}uv + \frac{25}{36}v^2$
c) $1{,}21 + a + \frac{25}{121}a^2$ **d)** $1{,}96x^4 - 2{,}8x^2 + 1$

4. **a)** $625 - 196a^2$ **b)** $1 - 81x^2$
c) $\frac{9}{16}u^2 - \frac{25}{36}v^2$ **d)** $0{,}49a^2 - 0{,}01b^2$

5. **a)** $2{,}25 - 0{,}0256t^2$ **b)** $\frac{64}{289}p^2 - 3{,}61q^2$
c) $400x^2y^2 - 121u^2v^2$ **d)** $\frac{169}{324}x^4 - 1$

•**6.** **a)** $20x^2 - 45y^2$ **b)** $3{,}6x^2 - 4{,}9y^2$
c) $175p^4 - 252q^4$ **d)** $48(xy)^2 - 147u^2v^2$

7. **a)** $6a^2 + 12ab + 6b^2$ **b)** $7x^2 - 7x + 1\frac{3}{4}$
c) $a^3 + 2a^2 + a$ **d)** $3x^7 - 12x^5 + 12x^3$

8. **a)** $a^4 - b^4$ **b)** $x^6 - y^6$ **c)** $x^8 - y^8$
d) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ **e)** $81 - 72u^2 + 16u^4$ ⁝**f)** $64x^6 - 1$

9. **a)** $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$ **b)** $4x^2 - 20x + 25 - 9y^2$
c) $36a^2 + 48ab + 16b^2 - 81c^2$ **d)** $196u^2 - 4uv + \frac{v^2}{49} - \frac{1}{121}$
e) $a^2 + 2ab + b^2 - x^2 + 2xy - y^2$ ⁝**f)** $16u^2 - v^2 + 2v - 1$

10. **a)** $(2a + 3b)^2 - 16a^2$ **b)** $(2a - 3b)^2 - 16a^2$
c) $16a^2 - (2a + 3b)^2$ **d)** $16a^2 - (2a - 3b)^2$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

11. a) $(13x+14y)^2-(13x-14y)^2$
b) $(0{,}1x-0{,}2y)^2-(0{,}1x+0{,}2y)^2$
c) $(\frac{3}{4}x+\frac{4}{3}y)^2-(\frac{3}{4}x-\frac{4}{3}y)^2$
d) $(1\frac{3}{4}x-2\frac{1}{3}y)^2-(1\frac{3}{4}x+2\frac{1}{3}y)^2$

12. a) $a^2-b^2-c^2+2bc$ **b)** $x^2-y^2-2yz-z^2$
• **c)** $2{,}89a^2-0{,}64b^2+2{,}08bc-1{,}69c^2$
• **d)** $3{,}24x^2-2{,}56y^2-3{,}52yz-1{,}21z^2$

• **13. a)** $2a^2-2b^2+a^2x-b^2x$ **b)** $2m^2x-8n^2x+3m^2y-12n^2y$
c) $12a^2x-2b^2y-3b^2x+8a^2y$
d) $36p^2x^2-9p^2y^2-16q^2x^2+4q^2y^2$

• **14. a)** $9a^2x-9a^2y-12abx+12aby+4b^2y-4b^2x$
: **b)** $\frac{1}{9}a^2x^2-\frac{1}{6}a^2xy+\frac{1}{4}a^2y^2-\frac{1}{9}b^2x^2+\frac{1}{6}b^2xy-\frac{1}{4}b^2y^2$

15. Verwandle, wenn möglich, in ein Produkt.
a) $a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2$ **b)** $36p^2+21pq+64q^2$
c) $-a^2-2ab-b^2+1$ **d)** $a^2-2ab+b^2-1$
e) u^2+uv+v^2 **f)** a^4+b^4
g) $4a^2-5b^2$ **h)** $a^2+2ab+b^2+1$

16. a) Beweise Satz 203.1.
b) a^3-8b^3 **c)** $243+216a^6$ **d)** $\frac{64}{125}x^3-1$
e) $\frac{243}{512}a^3+2\frac{10}{27}b^3$ **f)** $0{,}001x^3+y^3z^6$ **g)** $0{,}729u^3-1\,000\,000v^3$

7.5.4 Faktorisieren durch Probieren

Wenn du a^2+5a+6 in ein Produkt verwandeln sollst, so erscheint dir dies sicherlich auf den ersten Blick als aussichtslos. Erstaunlicherweise kommt man hier aber mit einigen kleinen Überlegungen und einem geschickten Probieren zum Ziel.
Da das Aggregat mit a^2 beginnt und aus 3 Gliedern besteht, versuchen wir den Ansatz

$a^2+5a+6=(a\,\square\,?)(a\,\triangle\,?)$.

Die Symbole $\square$ und $\triangle$ stehen dabei für $+$ oder $-$.
Die für die Fragezeichen zu wählenden Zahlen müssen, miteinander multipliziert, 6 ergeben. 6 läßt sich mit natürlichen Zahlen als $2\cdot 3$, aber auch als $1\cdot 6$ schreiben. Wir versuchen es mit $2\cdot 3$ und setzen also an

$a^2+5a+6=(a\,\square\,2)(a\,\triangle\,3)$.

Von den 4 möglichen Kombinationen $++$, $+-$, $-+$ und $--$ scheiden die beiden mittleren aus, da wir sonst -6 für das letzte Glied erhielten. Die Kom-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

bination + + führt zum richtigen mittleren Glied $5a$. Also gilt die Faktorisierung

$$a^2 + 5a + 6 = (a+2)(a+3).$$

Hätten wir 6 als $1 \cdot 6$ zerlegt, so ergäbe $(a \square 1)(a \triangle 6)$ für keine der 4 Rechenzeichenkombinationen das mittlere Glied $5a$. Man muß also ein Gespür dafür haben! Bei $a^2 + 5a - 6$ führt nämlich gerade $6 = 1 \cdot 6$ zum Ziel:

$$a^2 + 5a - 6 = (a-1)(a+6).$$

Eine derartige Faktorisierung durch Probieren wird natürlich nicht immer gelingen. Beim Versuch hilft

> **Regel 205.1:** Bei Trinomen der Form $x^2 + bx + c$ mit ganzen Zahlen b und c zerlegt man c in ein Produkt zweier natürlicher Zahlen und versucht, die Rechenzeichenkombination so zu bestimmen, daß sich die richtigen Rechenzeichen und das mittlere Glied ergeben.
> Hat das Trinom die Form $ax^2 + bx + c$, so klammert man erst a aus.

Beispiel: $\frac{3}{4}x^2 - 6x + 9 = \frac{3}{4}(x^2 - 8x + 12) = \frac{3}{4}(x-2)(x-6)$

Aufgaben

1. a) $x^2 + 7x + 12$ b) $x^2 - x - 12$
   c) $x^2 + 11x + 10$ d) $x^2 + 9x - 10$
2. a) $u^2 - 13u + 40$ b) $a^2 - 20a + 96$
   c) $z^2 - 10z + 9$ d) $x^2 - x - 4$
•3. a) $x^2 - 5xy + 4y^2$ b) $y^2 + yz - 56z^2$
   c) $a^2 - 9ab + 18b^2$ d) $u^2 - 4uv - 21v^2$
•4. a) $x^2 + 2x - 48$ b) $x^2 - 2x - 48$
   c) $x^2 - 2x + 48$ d) $x^2 + 2x + 48$
5. a) $2x^2 + 16x + 30$ b) $7x^2 - 14x - 105$
   c) $\frac{3}{4}x^2 + 6x + 9$ d) $-x^2 + 12x - 35$
•6. a) $3x^2 - 39x + 108$ b) $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9$
   c) $-\frac{1}{2}x^2 + 9x - 18$ d) $0{,}1a^2 - 1{,}1a + 1$
•7. a) $-0{,}4z^2 + 2{,}8z - 4{,}8$ b) $\frac{1}{4}p^2 - pq - \frac{21}{4}q^2$
   c) $\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{3}x + 8$ d) $\frac{5}{4}y^2 + 25y + 120$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN