Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

7.1 Multiplikation von Aggregaten

7 Schwierigere Termumformungen

7.1 Multiplikation von Aggregaten

Nach dem allgemeinen Distributivgesetz (Satz 90.2) weißt du bereits, wie du ein Aggregat mit einer Zahl multiplizierst. Unter Berücksichtigung der Vorzeichenregeln wirst du also beispielsweise so rechnen:

$$a(b+c-d) = ab + ac - ad.$$

Was machst du aber, wenn du zwei Aggregate miteinander zu multiplizieren hast? Betrachten wir als **Beispiel** das Produkt

$$(-a+b)(c-d-e).$$

Stell dir vor, du könntest die erste Klammer ausrechnen und erhieltest als Wert die Zahl z. Dann hättest du nur noch $z(c-d-e)$ zu berechnen. Das kannst du aber nach dem Obigen leicht ausführen:

$$z(c-d-e) = zc - zd - ze.$$

Nun setzt du an Stelle von z wieder die ursprüngliche Klammer $(-a+b)$; dann nimmt die rechte Seite die folgende Form an:

$$zc - zd - ze = (-a+b)c - (-a+b)d - (-a+b)e.$$

Das rechts stehende Aggregat kannst du leicht mit Hilfe von Satz 108.1 umformen:

$$(-a+b)c - (-a+b)d - (-a+b)e = -ac + bc + ad - bd + ae - be.$$

Betrachtest du nun den Anfang und das Ende deiner Rechnung und ordnest die erhaltenen Summanden bezüglich des ersten Faktors a bzw. b, so ergibt sich

$$(-a+b)(c-d-e) = -ac + ad + ae + bc - bd - be,$$

und du erkennst die Gültigkeit von

> **Satz 182.1:** Zwei Aggregate werden miteinander multipliziert, indem man unter Berücksichtigung der Vorzeichenregeln jedes Glied des einen Aggregats mit jedem Glied des anderen Aggregats multipliziert und die entstandenen Produkte addiert.

Beachte:

1) Damit du die Übersicht nicht verlierst, raten wir dir folgendes Vorgehen: Multipliziere zuerst mit dem 1. Glied des 1. Aggregats der Reihe nach jedes Glied des 2. Aggregats. Multipliziere dann mit dem 2. Glied des 1. Aggregats der Reihe nach jedes Glied des 2. Aggregats. Fahre so fort, bis du schließlich mit dem letzten Glied des 1. Aggregats der Reihe nach jedes Glied des 2. Aggregats multipliziert hast.

$$(-a+b)(c-d-e) = -ac+ad+ae+bc-bd-be$$

2) Nehmen wir an, das erste Aggregat bestehe aus m Gliedern und das zweite aus n Gliedern, dann hat das nach der Ausführung der Multiplikation entstandene Aggregat $m \cdot n$ Glieder, weil ja jedes Glied des ersten Aggregats mit jedem Glied des zweiten multipliziert werden muß. Damit kannst du kontrollieren, ob du kein Produkt vergessen hast!

Beispiel 1:

$$(2x^2-3x-4)(5x-6) =$$
$$= 10x^3-12x^2-15x^2+18x-20x+24 =$$
$$= 10x^3-27x^2-2x+24.$$

Beispiel 2:

$$(\tfrac{3}{4}x+\tfrac{2}{3}y)(\tfrac{9}{16}x^2-\tfrac{1}{2}xy+\tfrac{4}{9}y^2) =$$
$$= \tfrac{27}{64}x^3-\tfrac{3}{8}x^2y+\tfrac{1}{3}xy^2+\tfrac{3}{8}x^2y-\tfrac{1}{3}xy^2+\tfrac{8}{27}y^3 =$$
$$= \tfrac{27}{64}x^3+\tfrac{8}{27}y^3.$$

Satz 182.1 läßt sich auch anwenden, wenn das Produkt aus mehr als zwei Aggregaten besteht. Sind es drei Aggregate, dann rechnest du am besten von links nach rechts der Reihe nach. Sind es aber vier oder mehr Aggregate, dann kannst du unter Verwendung des Assoziativgesetzes und unter Umständen auch des Kommutativgesetzes jeweils zwei geeignete Aggregate zu einem Produkt zusammenfassen und darauf Satz 182.1 anwenden. Mit einiger Erfahrung wirst du erkennen, welche Zusammenfassungen günstig sind. Ehe du dann weiterrechnest, mußt du die erhaltenen Aggregate noch vereinfachen. Dazu

Beispiel 3:

$$(2a-3b)(2a+3b)(5a-b) =$$
$$\stackrel{\text{A}}{=} [(2a-3b)(2a+3b)](5a-b) =$$
$$= (4a^2+6ab-6ab-9b^2)(5a-b) =$$
$$= (4a^2-9b^2)(5a-b) =$$
$$= 20a^3-4a^2b-45ab^2+9b^3.$$

Beispiel 4:

$$7b(2a-b)(a-2b)(-a-2b)(2a+b) =$$
$$\stackrel{\text{A}}{=} 7b[(2a-b)(a-2b)][(-a-2b)(2a+b)] =$$

$$\begin{aligned}
&= 7b(2a^2 - 4ab - ab + 2b^2)(-2a^2 - ab - 4ab - 2b^2) = \\
&= 7b(2a^2 - 5ab + 2b^2)(-2a^2 - 5ab - 2b^2) = \\
&= 7b(-4a^4 - 10a^3b - 4a^2b^2 + 10a^3b + 25a^2b^2 + 10ab^3 - \\
&\quad - 4a^2b^2 - 10ab^3 - 4b^4) = \\
&= 7b(-4a^4 + 17a^2b^2 - 4b^4) = \\
&= -28a^4b + 119a^2b^3 - 28b^5.
\end{aligned}$$

Aufgaben

1. a) $(p+q)(u+v)$ **b)** $(x+y)(a-b)$ **c)** $(3-s)(t+5)$
d) $(a-b)(c-d)$ **e)** $(-1+m)(m-n)$ **f)** $(-x-y)(-u-v)$

2. a) $(27a-3b)(ax+11y)$ **b)** $(16p-18r)(13q+9)$
c) $(-1\frac{2}{3}x+y)(\frac{4}{5}x-4\frac{1}{5}y)$ **d)** $(2{,}15m-0{,}7n)(3{,}5k+20{,}1l)$
e) $(0{,}05-5{,}3a)(-1{,}2a-3)$ **f)** $(1\frac{3}{7}p^2+0{,}5q)(1{,}25p+\frac{3}{4}q^3)$

3. a) $(a+b)(c-d)-(a-b)(c+d)$
b) $(a-b)(c-d)-(a+b)(c-d)$
c) $(a+b)(c+d)-(a-b)(c-d)$
d) $(3-r)(s+2t)-(7s+5t)(3r+8)+(4s-t)(r+1)$
e) $(2y-7)(5+y^2)+4y(3-5y-2y^2)-(y-6)(9y^2+1)$

4. a) $(17x^2a-3a^4)(x-5a)-(7a^2x^2+2x)(1+5a^4)$
b) $3m(16m-9n^3)(5m^2-n)-(12m^3-7n)(-2m-mn^3)(-2)$

5. a) $(3x^2+5y)[(27y-8x)-(14x+2y)]$
b) $(3a-9b)(2b+c)(-c-5a)$

6. a) $(u+v)(x+y+z)$ **b)** $(3s-2t+1)(p-3q-7r)$
c) $(m^2-n+1)(n^2+m+1)$ **d)** $(a-2b+3c-4d)(5e-6f+7g)$

7. a) $(1+x+x^2+x^3)(1-x)$ **b)** $(1-y+y^2-y^3+y^4)(1+y)$
c) $(1-a^2)(1+a^2+a^4+a^6)$ **d)** $(a^2+ab+b^2)(a-b)$

•8. a) $(1\frac{2}{5}x^2y-\frac{3}{4}xy^2)(17\frac{1}{2}x-\frac{3}{14}-2\frac{2}{7}y)$
b) $(0{,}04a^2-0{,}1ab+0{,}25b^2)(0{,}2a+0{,}5b)$
c) $(\frac{3}{4}x-\frac{2}{5}y)(\frac{9}{16}x^2+0{,}3xy+0{,}16y^2)$

9. a) $(a+b)(a+2b)(a+3b)$ **b)** $(a-b)(a-2b)(a-3b)$
c) $(1-x)(x+x^2)(2x-1)$ **d)** $(2-x)(4-x^2)(8-x^3)$

•10. a) $(1{,}2x-0{,}1y)(1{,}44x^2+0{,}01y^2)(0{,}1y+1{,}2x)$
b) $(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}x)(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}x^2)(\frac{4}{9}x^2-\frac{1}{4})$

11. a) $(1-x)(2-x)(3-x)(4-x)$ **b)** $(1-x)(2+x)(3-x)(4+x)$
c) $(2-y)(4+y^2)(4+2y+y^2)(-y+2)$

12. $(x^2 - x + 1)(x - 1) - (x^2 + x - 1)(x + 1)$

13. $(1 + 2x + x^2)(x - 2) + 4(x + 1) - (x + 2)(x^2 - 2x + 1)$

14. $(3x^2 - 2x + 1)(1 - 2x) - 11x^2 - 4(3 + 2x - x^2) + 6x(x^2 + 4)$

15. $(x^2 + ax + 2a^2)(2a - x) - (x^2 - 2ax + a^2)(x - 2a) - 2(3a^3 - x^3)$

16. $(3ab + 4ac - 7bc)(5ab - 6ac) - (4ab - 8ac + 7bc)(5ac - 7bc)$

17. $(x^2y - 2xy^2 + 3y^3)(2x^2 - 3xy) - (3x^3 + 2x^2y + xy^2)(4xy - 5y^2)$

18. $(x + y + z)(x - y) - (x + y - z)(x - z) - (x - y + z)(z - y) -$
$- (z - x - y)(x + y)$

19. $(o - p - q)(p + q) + (p - o - q)(o + q) - (q - o - p)(o + p)$

20. $(xy + xz - yz)(x + y) - (xy + yz - xz)(y - z) -$
$- (xz - xy + yz)(x + z)$

21. $(6x^4 - 9x^2y + 11y^2)(8x^2 - 7y) - (13y^2 + 21x^2y - 17x^4)(11x^2 + 13y)$

22. $(64a^6b^3 + 48a^3b^5 + 36a^4b^7 + 27a^3b^9)(4a^2b - 3ab^3)$

23. $(a^2b^4x - 2a^4b^3x^4 - 3a^6b^2x^7 + a^8bx^{10})(a^3b^2x^2 - 2a^5bx^5)$

24. $3a(2b - 5a)(3b + 4a) - 4b(7a^2 - 12ab) - (5b + 4a)(3a - 6b) \cdot 4a$

25. $x^2(1 - x) + x(1 + x)(1 - 2x) - 2(2 - x)(1 - 2x + 3x^2)$

26. $9(14 + 11a + 17a^2)(10 - 12a) - 13a(15 - 19a)(17 + 20a) +$
$+ 14a^2(17a - 11) - 44a^3$

27. $2(x - 2)(x - (2 - 3x)) - 3(2 + (x - 1))(4(x - 1) - 3(x - 2))$

28. $([2x(x - 4) - 3(x - 2)(2x + 3)](4x - 2) \cdot 3 + 48x^3)(3x - 5) -$
$- 540(x^2 - 3x + 1)$

29. $3[2(y - 4) + 5][(y - 2) \cdot 3 - 2(y - 4)] -$
$- 4[7 - 3(y + 2) + y][5 - y - 3(2 - y)]$

30. $([(x - 1)(x - 2) - 2] \cdot 2 - 2(2 - x)) \cdot 2 - [2 - 2(x - 2)(1 + x) +$
$+ 2(1 - 2x)]$

Gleichungen und Ungleichungen

31. **a)** $(x - 3\frac{1}{7})(x + 7) = (x - \frac{1}{7})(x - 7)$
b) $2(x + 0{,}1)(0{,}5x + 2) - (3 + \frac{1}{3}x)(3x - \frac{1}{3}) = 0$

32. $3x(x + 7) - x(3x + 7) + 70 = 0$

33. $4x(6 - 3x) + 6x(2x + 1) = 15$

34. $(\frac{3}{7}x - \frac{7}{3}) \cdot 21x - (33x + 5) \cdot \frac{3}{11}x = 277$

35. $0{,}32x(1{,}25x - 10) + (6{,}3 - 0{,}8x) \cdot 0{,}5x + 1 = 0$

36. $(x+1)(x-14) - (x+1)(x-15) = 17$

37. $(x-16)(3x+1) - (3x-1)(x-15) \leqq -35$

38. $(\frac{2}{15}x + \frac{1}{3})(25 - 3x) + (\frac{x}{6} - 15)(\frac{12}{5}x + 2) > 0$

39. $(2{,}1x - 1{,}5)(0{,}6x - 1{,}1) - (2{,}5 - 0{,}9x)(0{,}8 - 1{,}4x) + 5{,}4 \geqq 0$

40. Verlängert man in einem Quadrat ABCD die Seite [AB] über B hinaus um 2 cm, und [AD] über D hinaus um 5 cm und ergänzt zu einem Rechteck, so ist dessen Fläche um 1,22 dm^2 größer als die des Quadrats. Wie lang ist die Quadratseite?

41. Verlängert man eine Seite der Grundfläche eines Würfels um 3 cm und verkürzt die andere um 2 cm, während man die Höhe beibehält, so entsteht ein Quader gleichen Inhalts. Wie groß ist die Kantenlänge des Würfels?

um 1546

Nicolo Tartalea

Abb. 186.1 Niccolò TARTAGLIA
(1499 Brescia – 13.12.1557 Venedig)

Simon Stevin

Abb. 186.2 Simon STEVIN
(1548 Brügge – 20.2./8.4.1620 Leiden)*

* i betont. Niederländischer Mathematiker und Ingenieur. Anfänglich in der Finanzverwaltung tätig, ab 1593 Berater des Prinzen Moritz von Oranien. In seinem Buch *De Thiende* – „Der Zehnt" – (1585) behandelt er als erster systematisch die Stellenschreibweise von Zehnerbrüchen und trug damit wesentlich zur Verbreitung der Dezimalbrüche bei. Das bequeme **Komma** hat 1617 der schottische Mathematiker John NAPIER (1550–1617) eingeführt.