# Algebra

**Barth, Friedrich**

**München, 1996**

7.2 Binomische Formeln

## 7.2. Binomische Formeln

Bei algebraischen Umformungen treten häufig Terme der Art $(a+b)^2$ und $(a-b)^2$ bzw. $(a+b)(a-b)$ auf. Mit Satz 182.1 können wir sie leicht berechnen:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

In allen drei Fällen waren vier Glieder zu erwarten. Sie ließen sich aber zu weniger zusammenfassen. Daher lohnt es sich, wenn du dir diese drei wichtigen Umformungen als Formeln* merkst. Man nennt sie binomische** Formeln.

**Satz 187.1: Die binomischen Formeln**

1. binomische Formel: $\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$
2. binomische Formel: $\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$
3. binomische Formel: $\boldsymbol{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

*Beachte:* Beim Quadrieren einer Summe oder einer Differenz tritt außer den Quadraten der beiden Glieder auch noch ihr **doppeltes Produkt** auf.

**Beispiele:**

**1)** $(\underbrace{\tfrac{1}{6}x}_{a} + \underbrace{\tfrac{3}{5}y}_{b})^2 = \underbrace{(\tfrac{1}{6}x)^2}_{a^2} + 2 \cdot \underbrace{\tfrac{1}{6}x}_{a} \cdot \underbrace{\tfrac{3}{5}y}_{b} + \underbrace{(\tfrac{3}{5}y)^2}_{b^2} = \tfrac{1}{36}x^2 + \tfrac{1}{5}xy + \tfrac{9}{25}y^2$

**2)** $(\underbrace{0{,}1rs^2}_{a} - \underbrace{10r^2s}_{b})^2 = \underbrace{(0{,}1rs^2)^2}_{a^2} - 2 \cdot \underbrace{0{,}1rs^2}_{a} \cdot \underbrace{10r^2s}_{b} + \underbrace{(10r^2s)^2}_{b^2} =$

$= 0{,}01r^2s^4 - 2r^3s^3 + 100r^4s^2$

* Ein Gebilde der Geometrie bezeichnet EUKLID als σχῆμα (siehe Fußnote auf S. 160), das ins Lateinische als *figura* übersetzt wurde, was zu unserem Lehnwort *Figur* führte. Σχῆμα wurde aber auch mit *forma* übersetzt, das BOETHIUS zu *formula* verkleinerte, ihm dabei aber einen neuen Sinn gab. Bei LEIBNIZ (1646–1716) gewinnt *formula* dann die heutige Bedeutung von **Formel** als Ausdruck einer Gesetzmäßigkeit.

** Spezielle Summen aus zwei Summanden nannte EUKLID (4./3. Jh. v. Chr.) im Buch X seiner *Elemente* ἐκ δύο ὀνομάτων (ek dýo onomáton) = *aus zwei Namen*. GERHARD VON CREMONA (1114–1187) verwendet dafür in seiner Übersetzung der Kommentare des AL-NAYRIZI (lateinisch ANARITIUS, † um 922) zu den ersten zehn Büchern des EUKLID das Wort *binomium*. Luca PACIOLI (um 1445–1517) verallgemeinerte 1494 *binomio* zu *trinomio* und *multinomio* in seiner *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita*. Niccolò TARTAGLIA (1499–1557) kommt mit seinem *binomio* bzw. *trinomio de dignità algebratica* im 1560 postum erschienenen 2. Teil seines *General trattato di numeri, et misure* – »Allgemeine Abhandlung über Zahlen und Maße« – unserem Gebrauch schon sehr nahe. In der 1585 erschienenen *L'Arithmetique* des Niederländers Simon STEVIN (1548–1620) werden *binomie* in unserem Sinn für $a+b$ und $a-b$, *trinomie* für einen dreigliederigen Ausdruck und *multinomie* für ein allgemeines Aggregat verwendet. Letzteres setzt sich nicht durch. In der *In artem analyticem Isagoge* (1591) des François VIÈTE (1540–1603) tauchen ohne weitere Erklärung die Ausdrücke *binomia magnitudo* und *polynomia magnitudo* für eine zweigliedrige bzw. mehrgliedrige Größe auf. Sie waren anscheinend allgemeinverständlicher mathematischer Wortschatz. Im *Mathematischen Lexicon* (1716) des Christian v. WOLFF (1679–1754) liest man schließlich die Beschreibung: Binomium, Eine zweyfache Gröſſe wird genennet, die aus zwey Theilen beſtehet, die mit dem mehr = Zeichen zuſammen geſetzet werden, als a + b.

**3)** $\underbrace{(1{,}5u}_{a} + \underbrace{\tfrac{1}{5}v}_{b})(\underbrace{1{,}5u}_{a} - \underbrace{\tfrac{1}{5}v}_{b}) = \underbrace{(1{,}5u)^2}_{a^2} - \underbrace{(\tfrac{1}{5}v)^2}_{b^2} = 2{,}25u^2 - \tfrac{1}{25}v^2$

Die drei binomischen Formeln waren bereits den Babyloniern um 1700 v. Chr. bekannt. Ob und wie sie sie gegebenenfalls bewiesen haben, wissen wir nicht. Der griechische Mathematiker EUKLID (4./3. Jh. v. Chr.) hat diese drei Formeln mit Zeichnungen geometrisch bewiesen. Dieser Beweis setzt allerdings voraus, daß $a$ und $b$ und gegebenenfalls $a-b$ positive Zahlen sind. Seine Zeichnung für die 1. binomische Formel erklärt sich praktisch von selbst:

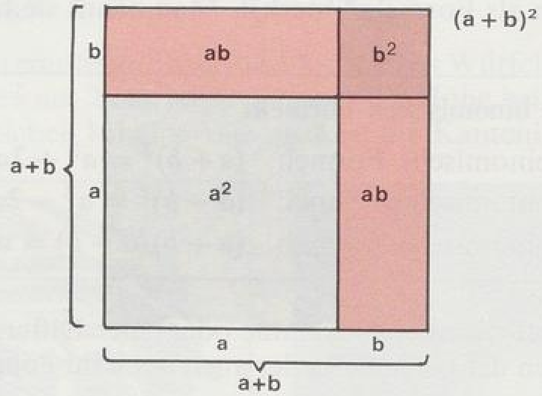



Abb. 188.1 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Auch für die beiden anderen Formeln kann man geometrische Veranschaulichungen finden. Sie sind allerdings komplizierter (vgl. Aufgabe 190/**24**).

Die 2. binomische Formel ist nur ein Sonderfall der 1. binomischen Formel, wenn man $(a-b)^2$ als $(a+(-b))^2$ schreibt. Dann gilt:

$(a+(-b))^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

Genauso kann man bei anderen Vorzeichenverteilungen verfahren:

$(-a+b)^2 = ((-a)+b)^2 = (-a)^2 + 2(-a) \cdot b + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(-a-b)^2 = ((-a)+(-b))^2 = (-a)^2 + 2(-a)(-b) + (-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

**Aufgaben**

**1.** **a)** $(1+x)^2$ **b)** $(x-1)^2$ **c)** $(2+x)^2$
**d)** $(1-2x)^2$ **e)** $(x^3-3)^2$ **f)** $(3-x^2)^2$

**2.** **a)** $(3a+4b)^2$ **b)** $(2x+5y)^2$ **c)** $(4x^2-9y^2)^2$
**d)** $(6xy+5y^2)^2$ **e)** $(7ab-9bc)^2$ **f)** $(11a^2x+13xy)^2$

**3.** **a)** $(17y+3z)^2$ **b)** $(13p-7q)^2$ **c)** $(14x-11)^2$
**d)** $(21+15t)^2$ **e)** $(\frac{2}{3}a+1\frac{4}{5}p)^2$ **f)** $(2{,}3c-0{,}11d)^2$
**g)** $(9u-\frac{6}{5}v)^2$ **h)** $(1{,}8r+3\frac{3}{5})^2$ **i)** $(\frac{3}{7}a-\frac{7}{6}b)^2$
**j)** $(\frac{3}{5}x-3\frac{1}{3}y)^2$ **k)** $(0{,}1a^2b+10ab^2)^2$ **l)** $(\frac{3}{70}u^3-0{,}07u^4)^2$

**4.** **a)** $(4-x)(4+x)$ **b)** $(22x^2+33)(22x^2-33)$
**c)** $(1-4x^2)(1+4x^2)$

**5.** **a)** $(5a-4x)(5a+4x)$ **b)** $(17x^2-19y^2)(17x^2+19y^2)$

**6.** **a)** $(16x+24y)(16x-24y)$
**b)** $(12p-23q)(12p+23q)$
**c)** $(7\frac{1}{3}+2\frac{4}{7}z)(-7\frac{1}{3}+2\frac{4}{7}z)$
**d)** $(-0{,}25u+0{,}07v)(-0{,}25u-0{,}07v)$

**7.** **a)** $(a+b)(-a+b)$ **b)** $(a-b)(-a-b)$
**c)** $(x-y)(-x+y)$ **d)** $(-x-y)(x+y)$

**8.** **a)** Beweise die Formel von BRAHMAGUPTA (598–nach 665):
$n^2=(n+a)(n-a)+a^2$
**b)** Diese Formel wurde von den Indern zur Berechnung von Zahlenquadraten verwendet; z. B.
$297^2=(297+3)(297-3)+3^2=300\cdot 294+9=88\,209.$
Berechne ebenso:
**1)** $98^2$ **2)** $395^2$ **3)** $1999^2$ **4)** $2001^2$ **5)** $9999^2$

**9.** Beweise die Formel von NARAYANA (um 1350):
$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

**10.** Die folgende Formel wurde auf einer altbabylonischen Tontafel aus dem 17. Jh. v. Chr. gefunden. Beweise sie!
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab$$

**11.** Beweise die Formeln
**a)** $(x+y)^2+(x-y)^2+(-x+y)^2+(-x-y)^2=4(x^2+y^2)$
**b)** $\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{2}=x^2+y^2$

**12.** **a)** $(3uv-2v^2)^2$ **b)** $(7a^2b+4ab^2)(7a^2b-4ab^2)$
**c)** $(x^6+y^3)^2$ **d)** $(8a^2b^2-5c^4)(5c^4-8a^2b^2)$
**e)** $(1\frac{6}{7}p^2qr^3-1)^2$ **f)** $(1{,}9c^5d-\frac{7}{8}d^3e^2)(\frac{7}{8}d^3e^2+1{,}9c^5d)$

**13.** Berechne $(a+b)^2-(a-b)^2$ auf zwei Arten.

**14.** Bestimme die Werte von $(a+b)^2$ und $a^2+b^2$ für
$a=7$ $(-4;\ 21;\ -4\frac{1}{6};\ \frac{14}{5})$ und $b=3$ $(11;\ -21;\ -\frac{4}{3};\ -2{,}8)$.

**15.** $(2-x)^2-(2-x)(2+x)+(2+x)^2$

**16.** $(4a+3x)^2+3(4a+5x)(3a-2x)-4(3a-4x)^2$

**17.** $(3a^2-16ax)^2-4ax(7a-2x)(5x-4a)-6a^2(2x-3a)(2x+3a)$

**18.** $17a^3-3b(11a+7b)(7b-11a)+2a(11b-7a)^2-$
$-(11b-7a)(11b-6a)\cdot 3b$

**19.** $x^4+2x^2(x-1)^2-3x(x^2-x+1)(x+1)-(x^2-2x+1)(1+x)(1-x)$

**20.** $(x^2-y^2)^2+x(x-y)^2(x-y)-y(x-y)^2(x+y)+xy(x+2y)(2x-y)$

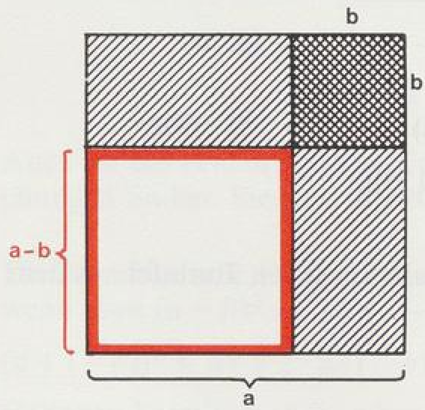
**21.** $(a+1)^2\cdot 2a-a(a+1)(1-a)^2+2(a-1)(a+1)^2+$
$+a(a^2+2a+1)(a-1)$

• **22.** $[(x+y)+z][(x+y)+z]-[(x-y)-z][(x-y)-z]+$
$+[(y-x)-z][(y-x)-z]-[x+(y+z)][(y+z)+x]$

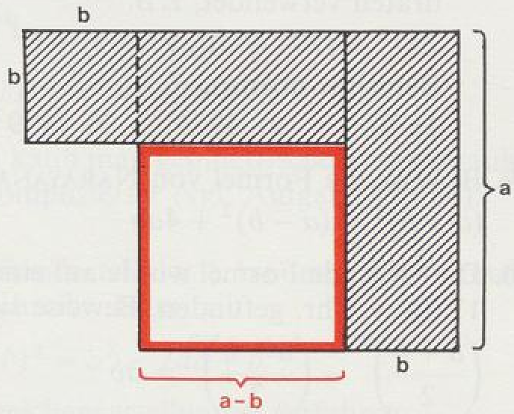
**23.** $[(\frac{2}{3}a-\frac{3}{2}b)+1][(\frac{2}{3}a-\frac{3}{2}b)+1]$

**24.** Welche Formeln werden durch die Abbildungen veranschaulicht? Begründung!

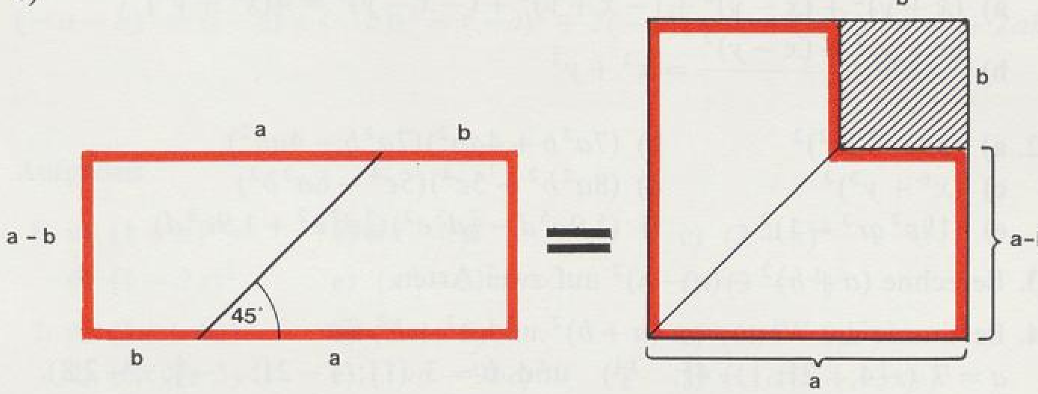
**a)**




**b)**




**c)**



• **25.** $(\frac{9}{5}a + \frac{5}{2}b)(\frac{5}{2}b - \frac{9}{5}a) - (\frac{3}{2}b + \frac{4}{5}a)^2 - (\frac{3}{2}b - \frac{4}{5}a)^2$

• **26.** $2(0{,}4 - 0{,}3x)^2 - 0{,}4(1 + 2x)^2 - 3(x - 0{,}2)(0{,}2 - x)$

**27. Quadrieren zweistelliger Zahlen:**
**Beispiel:**
$34^2 = (4 + 3 \cdot 10)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 10 + 3^2 \cdot 100$, also:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | (16 = Quadrat der Einerziffer) | | **6** an, **1** gemerkt |
| 240 | (24 = doppeltes Produkt der Ziffern) | **4** + **1** = 5 | an, **2** gemerkt |
| 900 | ( 9 = Quadrat der Zehnerziffer) | **9** + **2** = 11 | an |
| $34^2 = 1156$ | | 1156 | |

Berechne so die Quadrate der Zahlen:

**a)** 59; 26; 94; 73; 88; 47; 65; 31
**b)** 2,9; 6,7; 0,48; 0,038; 550; 0,00093
**c)** $\frac{41}{32}$; $\frac{82}{19}$; $\frac{54}{53}$; $\frac{71}{99}$; $\frac{1{,}8}{23}$; $\frac{670}{1{,}2}$; $\frac{0{,}85}{0{,}044}$

**28. Umwandlung eines Produkts in die Form $(a + b)(a - b)$:**
**Beispiele:**

$$53 \cdot 47 = (50 + 3)(50 - 3) = 50^2 - 3^2 = 2500 - 9 = 2491$$
$$24 \cdot 26 = (25 - 1)(25 + 1) = 25^2 - 1^2 = 625 - 1 = 624$$

Berechne so folgende Produkte:

**a)** $29 \cdot 31$; $65 \cdot 55$; $23 \cdot 27$; $72 \cdot 88$
**b)** $99 \cdot 101$; $498 \cdot 502$; $243 \cdot 257$; $1012 \cdot 988$
**c)** $3{,}8 \cdot 42$; $0{,}74 \cdot 6{,}6$; $\frac{58}{75} \cdot \frac{62}{85}$; $\frac{49}{58} \cdot \frac{49}{62}$

**29.** Das Quadrat einer Zahl mit der Einerstelle 5, zum Beispiel 65, berechnet Peter folgendermaßen:
»$6 \cdot (6 + 1) = 6 \cdot 7 = 42$; 25 angehängt; Ergebnis 4225.«
Er erhält also den richtigen Wert von $65^2$.
Prüfe dieses Verfahren an einigen ähnlichen Beispielen. Beweise, daß man nach dieser Methode das Quadrat jeder Zahl mit der Einerstelle 5 berechnen kann. (Tip: Schreibe die Zahl als Summe mit 5 als zweitem Summanden und wende die Formel für $(a + b)^2$ an.)

## *Gleichungen und Ungleichungen*

**30.** $(2x + 3)(2x - 3) = (2x + 3)^2$

**31.** $(x + 3)^2 + 2(2x + 1)(2x - 1) = (5 - 3x)^2$

**32.** $(x - 3)^2 - x^2 = 3 - 3(x + 2)$

**33.** $(x + 1)^2 > (x + 1)(x - 1) + x + 7$

**34.** $(x - 1)^2 \leqq x^2 - 2$

**35.** $(x+2)^2-(x-4)^2 \geqq 2(x-4)+9x$

**36.** $(x-3)^2+(x+1)^2+3x+5<2(x-1)(x+1)+2$

**37.** $(x+1)^2-(x+2)^2=(x+3)^2-(x+4)^2$

**38.** $(x+3)(x-3)+(x+3)^2=(x-3)(x+3)+(x-3)^2$

**39.** $(2x-1)^2+x^2=(3x+1)^2-(2x-5)^2$

**40.** $x^2-1+(x-1)^2+(x-1)(x+1)>3x^2-2x$

**41.** Verkleinert man die Seiten eines Quadrats um je 10 m, so entsteht ein um 1,4 a kleineres Quadrat. Wie lang ist die Seite des ursprünglichen Quadrats?

**42.** Die eine Seite eines Rechtecks ist um 5 cm größer als die andere. Die Fläche ist um 64 $cm^2$ kleiner als die Fläche eines Quadrats, dessen Seite um 4 cm größer als die kleinere Rechtecksseite ist. Berechne die Seiten des Rechtecks.

**43.** Wenn in einem Quadrat die eine Seite um 2 cm verkleinert und die andere um ebensoviel vergrößert wird, so erhält man ein ebenso großes Rechteck wie bei Verkürzung der einen Quadratseite um 4 cm und Verlängerung der anderen um 10 cm. Wie groß ist die Quadratseite?

**44.** Der Inhalt eines Rechtecks, dessen Seiten sich um 11 cm unterscheiden, ändert sich nicht, wenn man die größere Seite um 6 cm verkleinert und die kleinere um 5 cm vergrößert. Berechne Länge und Breite des ursprünglichen Rechtecks.

**45.** Wird bei einem Würfel die erste Kante um 2 dm vergrößert und die zweite um ebensoviel verkleinert, während man die dritte beibehält, so entsteht ein Quader, dessen Volumen um 12 $dm^3$ kleiner ist als dasjenige des Würfels. Wie lang ist die Würfelkante?

**46.** Bei einem Quader ist die zweite Kante um 1 cm größer als das Doppelte der ersten, die dritte um 2 cm kleiner als die zweite. Der Rauminhalt dieses Quaders ist um 5 $cm^3$ kleiner als das vierfache Volumen eines Würfels, dessen Kante mit der ersten Quaderkante übereinstimmt. Berechne die Kanten des Quaders.

**47.** Vergrößert man bei einem Würfel alle Kanten um 1 dm, so nimmt seine Oberfläche um 0,3 $m^2$ zu. Wie groß ist der Rauminhalt dieses Würfels?