Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

Aufgaben

3) $(\underbrace{1{,}5u}_{a} + \underbrace{\tfrac{1}{5}v}_{b})(\underbrace{1{,}5u}_{a} - \underbrace{\tfrac{1}{5}v}_{b}) = \underbrace{(1{,}5u)^2}_{a^2} - \underbrace{(\tfrac{1}{5}v)^2}_{b^2} = 2{,}25u^2 - \tfrac{1}{25}v^2$

Die drei binomischen Formeln waren bereits den Babyloniern um 1700 v. Chr. bekannt. Ob und wie sie sie gegebenenfalls bewiesen haben, wissen wir nicht. Der griechische Mathematiker EUKLID (4./3. Jh. v. Chr.) hat diese drei Formeln mit Zeichnungen geometrisch bewiesen. Dieser Beweis setzt allerdings voraus, daß a und b und gegebenenfalls $a-b$ positive Zahlen sind. Seine Zeichnung für die 1. binomische Formel erklärt sich praktisch von selbst:

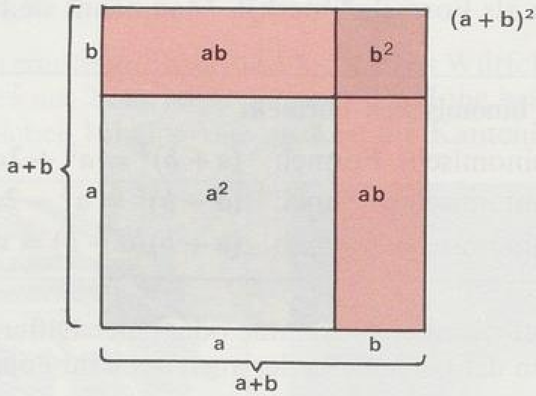


Abb. 188.1 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Auch für die beiden anderen Formeln kann man geometrische Veranschaulichungen finden. Sie sind allerdings komplizierter (vgl. Aufgabe 190/**24**).

Die 2. binomische Formel ist nur ein Sonderfall der 1. binomischen Formel, wenn man $(a-b)^2$ als $(a+(-b))^2$ schreibt. Dann gilt:

$(a+(-b))^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Genauso kann man bei anderen Vorzeichenverteilungen verfahren:

$$(-a+b)^2 = ((-a)+b)^2 = (-a)^2 + 2(-a)\cdot b + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(-a-b)^2 = ((-a)+(-b))^2 = (-a)^2 + 2(-a)(-b) + (-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Aufgaben

1. **a)** $(1+x)^2$ **b)** $(x-1)^2$ **c)** $(2+x)^2$
d) $(1-2x)^2$ **e)** $(x^3-3)^2$ **f)** $(3-x^2)^2$

2. **a)** $(3a+4b)^2$ **b)** $(2x+5y)^2$ **c)** $(4x^2-9y^2)^2$
d) $(6xy+5y^2)^2$ **e)** $(7ab-9bc)^2$ **f)** $(11a^2x+13xy)^2$

3. **a)** $(17y+3z)^2$ **b)** $(13p-7q)^2$ **c)** $(14x-11)^2$
d) $(21+15t)^2$ **e)** $(\frac{2}{3}a+1\frac{4}{5}p)^2$ **f)** $(2{,}3c-0{,}11d)^2$
g) $(9u-\frac{6}{5}v)^2$ **h)** $(1{,}8r+3\frac{3}{5})^2$ **i)** $(\frac{3}{7}a-\frac{7}{6}b)^2$
j) $(\frac{3}{5}x-3\frac{1}{3}y)^2$ **k)** $(0{,}1a^2b+10ab^2)^2$ **l)** $(\frac{3}{70}u^3-0{,}07u^4)^2$

4. **a)** $(4-x)(4+x)$ **b)** $(22x^2+33)(22x^2-33)$
c) $(1-4x^2)(1+4x^2)$

5. **a)** $(5a-4x)(5a+4x)$ **b)** $(17x^2-19y^2)(17x^2+19y^2)$

6. **a)** $(16x+24y)(16x-24y)$
b) $(12p-23q)(12p+23q)$
c) $(7\frac{1}{3}+2\frac{4}{7}z)(-7\frac{1}{3}+2\frac{4}{7}z)$
d) $(-0{,}25u+0{,}07v)(-0{,}25u-0{,}07v)$

7. **a)** $(a+b)(-a+b)$ **b)** $(a-b)(-a-b)$
c) $(x-y)(-x+y)$ **d)** $(-x-y)(x+y)$

8. **a)** Beweise die Formel von Brahmagupta (598–nach 665):
$n^2=(n+a)(n-a)+a^2$
b) Diese Formel wurde von den Indern zur Berechnung von Zahlenquadraten verwendet; z. B.
$297^2=(297+3)(297-3)+3^2=300\cdot 294+9=88\,209.$
Berechne ebenso:
1) 98^2 **2)** 395^2 **3)** 1999^2 **4)** 2001^2 **5)** 9999^2

9. Beweise die Formel von Narayana (um 1350):
$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

10. Die folgende Formel wurde auf einer altbabylonischen Tontafel aus dem 17. Jh. v. Chr. gefunden. Beweise sie!
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab$$

11. Beweise die Formeln
a) $(x+y)^2+(x-y)^2+(-x+y)^2+(-x-y)^2=4(x^2+y^2)$
b) $\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{2}=x^2+y^2$

12. **a)** $(3uv-2v^2)^2$ **b)** $(7a^2b+4ab^2)(7a^2b-4ab^2)$
c) $(x^6+y^3)^2$ **d)** $(8a^2b^2-5c^4)(5c^4-8a^2b^2)$
e) $(1\frac{6}{7}p^2qr^3-1)^2$ **f)** $(1{,}9c^5d-\frac{7}{8}d^3e^2)(\frac{7}{8}d^3e^2+1{,}9c^5d)$

13. Berechne $(a+b)^2-(a-b)^2$ auf zwei Arten.

14. Bestimme die Werte von $(a+b)^2$ und a^2+b^2 für
$a=7$ $(-4;\ 21;\ -4\frac{1}{6};\ \frac{14}{5})$ und $b=3$ $(11;\ -21;\ -\frac{4}{3};\ -2{,}8)$.

15. $(2-x)^2-(2-x)(2+x)+(2+x)^2$

16. $(4a+3x)^2+3(4a+5x)(3a-2x)-4(3a-4x)^2$

17. $(3a^2-16ax)^2-4ax(7a-2x)(5x-4a)-6a^2(2x-3a)(2x+3a)$

18. $17a^3-3b(11a+7b)(7b-11a)+2a(11b-7a)^2-$
$-(11b-7a)(11b-6a)\cdot 3b$

19. $x^4+2x^2(x-1)^2-3x(x^2-x+1)(x+1)-(x^2-2x+1)(1+x)(1-x)$

20. $(x^2-y^2)^2+x(x-y)^2(x-y)-y(x-y)^2(x+y)+xy(x+2y)(2x-y)$

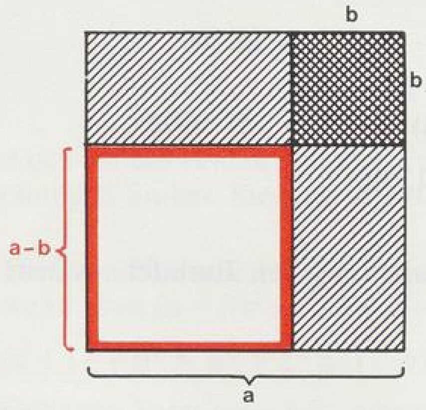
21. $(a+1)^2\cdot 2a-a(a+1)(1-a)^2+2(a-1)(a+1)^2+$
$+a(a^2+2a+1)(a-1)$

• **22.** $[(x+y)+z][(x+y)+z]-[(x-y)-z][(x-y)-z]+$
$+[(y-x)-z][(y-x)-z]-[x+(y+z)][(y+z)+x]$

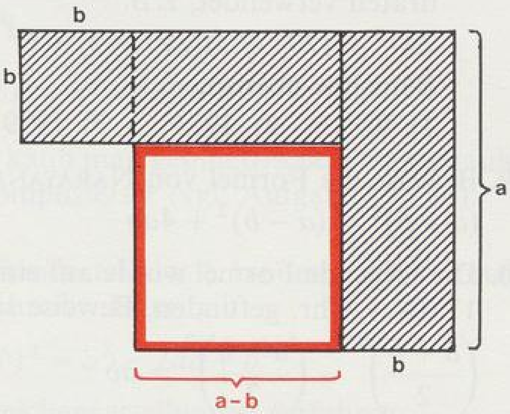
23. $[(\frac{2}{3}a-\frac{3}{2}b)+1][(\frac{2}{3}a-\frac{3}{2}b)+1]$

24. Welche Formeln werden durch die Abbildungen veranschaulicht? Begründung!

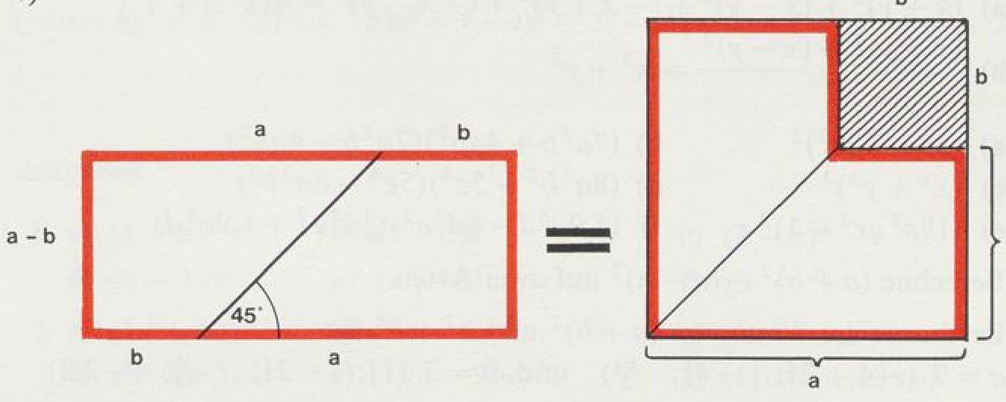
a)



b)



c)



• **25.** $(\frac{9}{5}a + \frac{5}{2}b)(\frac{5}{2}b - \frac{9}{5}a) - (\frac{3}{2}b + \frac{4}{5}a)^2 - (\frac{3}{2}b - \frac{4}{5}a)^2$

• **26.** $2(0{,}4 - 0{,}3x)^2 - 0{,}4(1 + 2x)^2 - 3(x - 0{,}2)(0{,}2 - x)$

27. Quadrieren zweistelliger Zahlen:
Beispiel:
$34^2 = (4 + 3 \cdot 10)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 10 + 3^2 \cdot 100$, also:

16	(16 = Quadrat der Einerziffer)		**6** an, **1** gemerkt
240	(24 = doppeltes Produkt der Ziffern)	**4** + **1** = 5	an, **2** gemerkt
900	(9 = Quadrat der Zehnerziffer)	**9** + **2** = 11	an
$34^2 = 1156$		1156	

Berechne so die Quadrate der Zahlen:

a) 59; 26; 94; 73; 88; 47; 65; 31

b) 2,9; 6,7; 0,48; 0,038; 550; 0,00093

c) $\frac{41}{32}$; $\frac{82}{19}$; $\frac{54}{53}$; $\frac{71}{99}$; $\frac{1{,}8}{23}$; $\frac{670}{1{,}2}$; $\frac{0{,}85}{0{,}044}$

28. Umwandlung eines Produkts in die Form $(a + b)(a - b)$:
Beispiele:

$$53 \cdot 47 = (50 + 3)(50 - 3) = 50^2 - 3^2 = 2500 - 9 = 2491$$
$$24 \cdot 26 = (25 - 1)(25 + 1) = 25^2 - 1^2 = 625 - 1 = 624$$

Berechne so folgende Produkte:

a) $29 \cdot 31$; $65 \cdot 55$; $23 \cdot 27$; $72 \cdot 88$

b) $99 \cdot 101$; $498 \cdot 502$; $243 \cdot 257$; $1012 \cdot 988$

c) $3{,}8 \cdot 42$; $0{,}74 \cdot 6{,}6$; $\frac{58}{75} \cdot \frac{62}{85}$; $\frac{49}{58} \cdot \frac{49}{62}$

29. Das Quadrat einer Zahl mit der Einerstelle 5, zum Beispiel 65, berechnet Peter folgendermaßen:
»$6 \cdot (6 + 1) = 6 \cdot 7 = 42$; 25 angehängt; Ergebnis 4225.«
Er erhält also den richtigen Wert von 65^2.
Prüfe dieses Verfahren an einigen ähnlichen Beispielen. Beweise, daß man nach dieser Methode das Quadrat jeder Zahl mit der Einerstelle 5 berechnen kann. (Tip: Schreibe die Zahl als Summe mit 5 als zweitem Summanden und wende die Formel für $(a + b)^2$ an.)

Gleichungen und Ungleichungen

30. $(2x + 3)(2x - 3) = (2x + 3)^2$

31. $(x + 3)^2 + 2(2x + 1)(2x - 1) = (5 - 3x)^2$

32. $(x - 3)^2 - x^2 = 3 - 3(x + 2)$

33. $(x + 1)^2 > (x + 1)(x - 1) + x + 7$

34. $(x - 1)^2 \leqq x^2 - 2$

35. $(x+2)^2 - (x-4)^2 \geqq 2(x-4) + 9x$

36. $(x-3)^2 + (x+1)^2 + 3x + 5 < 2(x-1)(x+1) + 2$

37. $(x+1)^2 - (x+2)^2 = (x+3)^2 - (x+4)^2$

38. $(x+3)(x-3) + (x+3)^2 = (x-3)(x+3) + (x-3)^2$

39. $(2x-1)^2 + x^2 = (3x+1)^2 - (2x-5)^2$

40. $x^2 - 1 + (x-1)^2 + (x-1)(x+1) > 3x^2 - 2x$

41. Verkleinert man die Seiten eines Quadrats um je 10 m, so entsteht ein um 1,4 a kleineres Quadrat. Wie lang ist die Seite des ursprünglichen Quadrats?

42. Die eine Seite eines Rechtecks ist um 5 cm größer als die andere. Die Fläche ist um 64 cm^2 kleiner als die Fläche eines Quadrats, dessen Seite um 4 cm größer als die kleinere Rechtecksseite ist. Berechne die Seiten des Rechtecks.

43. Wenn in einem Quadrat die eine Seite um 2 cm verkleinert und die andere um ebensoviel vergrößert wird, so erhält man ein ebenso großes Rechteck wie bei Verkürzung der einen Quadratseite um 4 cm und Verlängerung der anderen um 10 cm. Wie groß ist die Quadratseite?

44. Der Inhalt eines Rechtecks, dessen Seiten sich um 11 cm unterscheiden, ändert sich nicht, wenn man die größere Seite um 6 cm verkleinert und die kleinere um 5 cm vergrößert. Berechne Länge und Breite des ursprünglichen Rechtecks.

45. Wird bei einem Würfel die erste Kante um 2 dm vergrößert und die zweite um ebensoviel verkleinert, während man die dritte beibehält, so entsteht ein Quader, dessen Volumen um 12 dm^3 kleiner ist als dasjenige des Würfels. Wie lang ist die Würfelkante?

46. Bei einem Quader ist die zweite Kante um 1 cm größer als das Doppelte der ersten, die dritte um 2 cm kleiner als die zweite. Der Rauminhalt dieses Quaders ist um 5 cm^3 kleiner als das vierfache Volumen eines Würfels, dessen Kante mit der ersten Quaderkante übereinstimmt. Berechne die Kanten des Quaders.

47. Vergrößert man bei einem Würfel alle Kanten um 1 dm, so nimmt seine Oberfläche um 0,3 m^2 zu. Wie groß ist der Rauminhalt dieses Würfels?