Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

Aufgaben

Dazu ein

Beispiel:

$$(-\tfrac{3}{2}x+2y-xz-4)^2 =$$
$$=\tfrac{9}{4}x^2+4y^2+x^2z^2+16-6xy+3x^2z+12x-4xyz-16y+8xz$$

Kehren wir zurück zu $(a+b+c)^2$. Wir hätten das Quadrat auch anders als oben ausrechnen können, nämlich mit Hilfe der 1. binomischen Formel. Dazu müßte man beispielsweise $a+b$ mittels einer Klammer zusammenfassen:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= [(a+b)+c]^2 = \\ &= (a+b)^2+2(a+b)c+c^2 = \\ &= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2 = \\ &= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.\end{aligned}$$

Einen kleinen Vorteil bringt dieses Verfahren, da wir keine 9 Produkte ausrechnen mußten. Aber Satz 193.1 ist natürlich am schnellsten.
Einen großen Vorteil bringt der Trick des Klammerns aber, wenn man ein Produkt von zwei Aggregaten dadurch auf eine Form bringen kann, bei der sich die 3. binomische Formel anwenden läßt.

Beispiel 1:

$$\begin{aligned}&(2a+3b+4c)(2a+3b-4c) = \\ &= [(2a+3b)+4c][(2a+3b)-4c] = \\ &= (2a+3b)^2-(4c)^2 = \\ &= 4a^2+12ab+9b^2-16c^2.\end{aligned}$$

Beispiel 2:

$(2a-3b+4c)(2a+3b-4c)$

Das sieht recht schwierig aus! Zwar kann man in der zweiten Klammer $3b-4c$ zusammenklammern. Was soll aber in der ersten Klammer geschehen? Wir bräuchten ebenfalls $(3b-4c)$, aber ein Minuszeichen davor.
Satz 106.2 macht's möglich:

$$\begin{aligned}&(2a-3b+4c)(2a+3b-4c) = \\ &= [2a-(3b-4c)][2a+(3b-4c)] = \\ &= (2a)^2-(3b-4c)^2 = \\ &= 4a^2-(9b^2-24bc+16c^2) = \\ &= 4a^2-9b^2+24bc-16c^2\end{aligned}$$

Aufgaben

1. a) $(u+v+w)^2$ b) $(u+v-w)^2$ c) $(u-v-w)^2$ d) $(-u-v-w)^2$
2. a) $(3x+5y+1)^2$ b) $(2x+3y+4z)^2$
   c) $(2x-3y+4z)^2$ d) $(0{,}7a-1{,}1b-0{,}9c)^2$
   e) $(5x^2-3y-1)^2$ f) $(1\tfrac{3}{5}a-2\tfrac{2}{3}b+1\tfrac{1}{4}c)^2$
   g) $(0{,}8x-1{,}2y+1{,}6xy)^2$ h) $(0{,}1x-0{,}2xy+0{,}3y)^2$

3. **a)** $(u+v+w)^2+(v-u+w)^2$
b) $(2a-4b+6c)^2-(-8a+b+2c)^2$
c) $100(0{,}4r+0{,}3s-\frac{1}{2}t)^2-4(2a+\frac{3}{2}b-2{,}5c)^2$

4. Stelle die Formel für $(a+b+c)^2$ durch eine Zeichnung dar.

5. **a)** $(5u-8v+6w-2)^2$ **b)** $(3x^3-2x^2+x-1)^2$
•**c)** $(17a^2-14ab+13b^2-11b)^2$ •**d)** $(1{,}2x^2+1{,}3y^2-0{,}25x-0{,}15y)^2$
•**e)** $(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}b^2-\frac{3}{4}a+\frac{2}{3}b)^2$

6. **a)** $(u+v+w)(u+v-w)$ **b)** $(u+v+w)(u-v-w)$
c) $(u-v+w)(u+v-w)$ **d)** $(2p+q+7r)(2p+q-7r)$
e) $(\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}y+z)(\frac{3}{2}x+\frac{2}{3}y-z)$ **f)** $(0{,}5a-\frac{1}{3}b-2c)(2c-\frac{1}{3}b-0{,}5a)$

7. **a)** $(a+b+c)(a+b-c)$ **b)** $(a+b-c)(a-b+c)$

8. **a)** $(1-x-y)(1+x+y)$ **b)** $(1-x+x^2)(1-x-x^2)$

•**9.** **a)** $(7a-9x+11y^2)(7a+9x-11y^2)$
b) $(6x^2-13y^2+15xy)(6x^2-13y^2-15xy)$

•**10.** **a)** $(9ax^2-11a^2+4x^4)(9ax^2+11a^2-4x^4)$
b) $(9ax^2+11a^2+4x^4)(9ax^2-11a^2+4x^4)$

•**11.** **a)** $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$
b) $(1-x-x^2+x^3)(1-x+x^2-x^3)$

•**12.** **a)** $(8x^3+7x^2y+6xy^2-5y^3)(8x^3+7x^2y-6xy^2+5y^3)$
b) $(19a^6b-4a^4b^2-5a^2b^3-18b^4)(19a^6b-4a^4b^2+5a^2b^3+18b^4)$

:**13.** **a)** $(a-2b+2c-x)(a-2b-2c+x)$
b) $(x^2-2+y^2-b)(x^2-y^2-b+2)$

:**14.** **a)** $(b^2-x+a^2-y)(a^2+y-x-b^2)$
b) $(x+1-x^2-x^3)(1-x^2+x^3-x)$
c) $(1-a-x-ax)(a-x+ax+1)$
d) $(a^3+ab^2-a^2b-b^3)(b^3-ab^2-a^2b+a^3)$

** 7.4 Höhere Potenzen von Binomen

In manchen komplizierteren Rechnungen kommen nicht nur Quadrate, sondern auch höhere Potenzen von Binomen vor. Auch für sie kennt der Mathematiker Formeln, die den Umgang mit ihnen erleichtern. Betrachten wir zunächst die dritte Potenz $(a+b)^3$. Nach Definition der Potenz müßtest du $(a+b)(a+b)(a+b)$ rechnen, was zunächst 8 Summanden lieferte. Geschickter ist die Anwendung der 1. binomischen Formel:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2) = \\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 = \\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

Statt der 8 Summanden enthält das Ergebnis nur noch 4!