Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

7.4 Höhere Potenzen von Binomen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

3. a) $(u+v+w)^2+(v-u+w)^2$
b) $(2a-4b+6c)^2-(-8a+b+2c)^2$
c) $100(0{,}4r+0{,}3s-\frac{1}{2}t)^2-4(2a+\frac{3}{2}b-2{,}5c)^2$

4. Stelle die Formel für $(a+b+c)^2$ durch eine Zeichnung dar.

5. a) $(5u-8v+6w-2)^2$ b) $(3x^3-2x^2+x-1)^2$
• c) $(17a^2-14ab+13b^2-11b)^2$ • d) $(1{,}2x^2+1{,}3y^2-0{,}25x-0{,}15y)^2$
• e) $(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}b^2-\frac{3}{4}a+\frac{2}{3}b)^2$

6. a) $(u+v+w)(u+v-w)$ b) $(u+v+w)(u-v-w)$
c) $(u-v+w)(u+v-w)$ d) $(2p+q+7r)(2p+q-7r)$
e) $(\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}y+z)(\frac{3}{2}x+\frac{2}{3}y-z)$ f) $(0{,}5a-\frac{1}{3}b-2c)(2c-\frac{1}{3}b-0{,}5a)$

7. a) $(a+b+c)(a+b-c)$ b) $(a+b-c)(a-b+c)$

8. a) $(1-x-y)(1+x+y)$ b) $(1-x+x^2)(1-x-x^2)$

•9. a) $(7a-9x+11y^2)(7a+9x-11y^2)$
b) $(6x^2-13y^2+15xy)(6x^2-13y^2-15xy)$

•10. a) $(9ax^2-11a^2+4x^4)(9ax^2+11a^2-4x^4)$
b) $(9ax^2+11a^2+4x^4)(9ax^2-11a^2+4x^4)$

•11. a) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$
b) $(1-x-x^2+x^3)(1-x+x^2-x^3)$

•12. a) $(8x^3+7x^2y+6xy^2-5y^3)(8x^3+7x^2y-6xy^2+5y^3)$
b) $(19a^6b-4a^4b^2-5a^2b^3-18b^4)(19a^6b-4a^4b^2+5a^2b^3+18b^4)$

:13. a) $(a-2b+2c-x)(a-2b-2c+x)$
b) $(x^2-2+y^2-b)(x^2-y^2-b+2)$

:14. a) $(b^2-x+a^2-y)(a^2+y-x-b^2)$
b) $(x+1-x^2-x^3)(1-x^2+x^3-x)$
c) $(1-a-x-ax)(a-x+ax+1)$
d) $(a^3+ab^2-a^2b-b^3)(b^3-ab^2-a^2b+a^3)$

**7.4 Höhere Potenzen von Binomen

In manchen komplizierteren Rechnungen kommen nicht nur Quadrate, sondern auch höhere Potenzen von Binomen vor. Auch für sie kennt der Mathematiker Formeln, die den Umgang mit ihnen erleichtern. Betrachten wir zunächst die dritte Potenz $(a+b)^3$. Nach Definition der Potenz müßtest du $(a+b)(a+b)(a+b)$ rechnen, was zunächst 8 Summanden lieferte. Geschickter ist die Anwendung der 1. binomischen Formel:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2) = \\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 = \\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

Statt der 8 Summanden enthält das Ergebnis nur noch 4!

Auch für $(a-b)^3$ können wir eine solche Rechnung durchführen. Einfacher geht's, wenn wir in dem Ergebnis von eben $(-b)$ statt b setzen:

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a+(-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\,.\end{aligned}$$

Wegen des häufigen Vorkommens lohnt es sich, diese Ergebnisse als Formeln auswendig zu lernen:

Satz 196.1: $\boldsymbol{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$
$\boldsymbol{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

Beispiel:

$$\begin{aligned}(3x-5y)^3 &= 27x^3 - 3\cdot 9x^2\cdot 5y + 3\cdot 3x\cdot 25y^2 - 125y^3 = \\ &= 27x^3 - 135x^2y + 225xy^2 - 125y^3\,.\end{aligned}$$

Durch eine räumliche Darstellung läßt sich die erste dieser Formeln auch mit Quadern veranschaulichen.

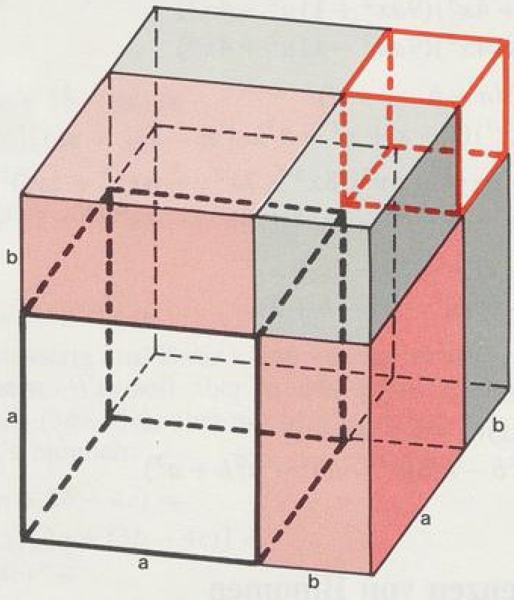

Abb. 196.1 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Die Mathematiker gaben sich natürlich nicht mit den Formeln für die Quadrate und die dritten Potenzen zufrieden und untersuchten auch höhere Potenzen des Binoms $(a+b)$. Diese höheren Potenzen lassen sich schrittweise auf niedrigere zurückführen und damit berechnen. Wir führen dies für $(a+b)^4$ einmal vor:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3 = \\ &= (a+b)(1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3) = \\ &= 1a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + 1ab^3 + \\ &\quad + 1a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + 1b^4 = \\ &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4\,.\end{aligned}$$

Das Koeffizientenmuster 1 – 3 – 3 – 1 wiederholt sich beim Ausmultiplizieren, um eine Stelle verschoben, in der zweiten Zeile. Das neue Koeffizientenmuster 1 – 4 – 6 – 4 – 1 ergibt sich somit recht einfach, indem man nebeneinanderstehende Koeffizienten des vorhergehenden Musters 0 – 1 – 3 – 3 – 1 – 0 addiert. Setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man eine dreieckige Anordnung von Koeffizienten. Sie ist auch als **Arithmetisches Dreieck** oder **Pascal-Stifelsches Dreieck** bekannt.

	1	
$(a+b)^1$	1 1	$1a + 1b$
$(a+b)^2$	1 2 1	$1a^2 + 2ab + 1b^2$
$(a+b)^3$	1 3 3 1	$1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1	$1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1	$1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$
………	………	………

Das Arithmetische Dreieck war bereits den Indern des 2. vorchristlichen Jh.s und den Arabern des 11. Jh.s bekannt. Die früheste erhaltene Darstellung dieses Dreiecks enthält die *Untersuchung der Arithmetischen Regeln der Neun Bücher* von Yang Hui aus dem Jahre 1261, die auf den chinesischen Mathematiker Qia Hsian [sprich: Tschia Hsien] (um 1100) zurückgeht (siehe Abbildung 197.1). Die erste gedruckte Darstellung in Europa schmückt das Titelblatt des *Neuen Rechenbuchs* von 1527 des Peter Apian (1495–1552) (siehe Abbildung 197.2). Benannt ist das Arithmetische Dreieck nach dem deutschen Mathematiker Michael Stifel (1487–1567) und dem französischen Mathematiker und Philosophen Blaise Pascal (1623–1662), die die interessanten Eigenschaften dieses Dreiecks erforscht haben.

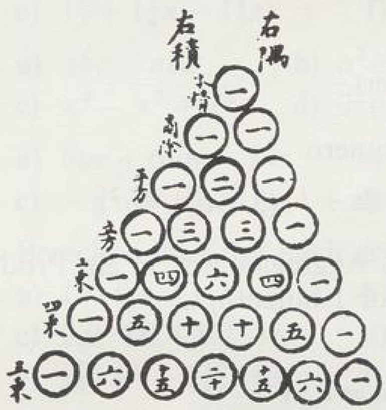

Abb. 197.1 Das Arithmetische Dreieck des Yang Hui (1261)

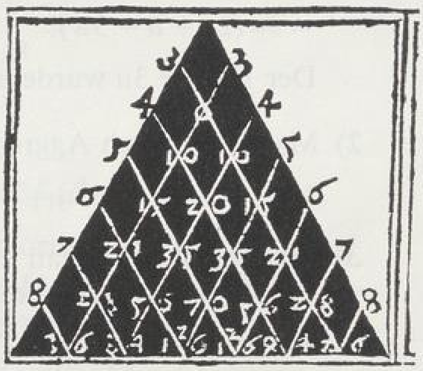

Abb. 197.2 Das Arithmetische Dreieck des Peter Apian (1527)

Aufgaben

1. **a)** $(2x+1)^3$ **b)** $(1-3a)^3$ **c)** $(2a+5b)^3$
d) $(3a-5b)^3$ **e)** $(-a+4b)^3$ **f)** $(-a-2b)^3$

2. **a)** $(0{,}1+u)^3$ **b)** $(-1{,}2r+5s)^3$ **c)** $(1\frac{1}{2}a+1\frac{1}{3}b)^3$

3. **a)** $(\frac{1}{2}ab+\frac{2}{3}a)^3$ **b)** $(\frac{5}{7}x-2\frac{4}{5}x^2)^3$ **c)** $(0{,}2x-0{,}5y)^3$

4. **a)** $(xy^2+2x^2y)^3$ **b)** $(\frac{5}{9}a^3b^2-\frac{3}{5}a^2b^3)^3$

5. Berechne $(a+b)^5$ auf zwei Arten, einmal als $(a+b)(a+b)^4$ und einmal als $(a+b)^2(a+b)^3$.

6. **a)** $(2a+1)^4$ **b)** $(x-3y)^5$ **c)** $(x-y)^7$

7.5 Die Kunst des Faktorisierens

7.5.1 Einfaches Ausklammern

Beim weiteren Eindringen in die Mathematik im Laufe der nächsten Jahre wirst du feststellen, daß man mit Produkten viel mehr anfangen kann als mit Summen. Daher mußt du Bescheid wissen, wie man Aggregate in Produkte verwandeln kann. Dieses Verwandeln nennt man auch **Faktorisieren** eines Aggregats.

Die einfachste Art des Faktorisierens kennst du bereits als eine Anwendung des verallgemeinerten Distributivgesetzes (Satz 90.2) in der Form des Ausklammerns. Wir vertiefen deine Kenntnisse durch einige

Beispiele:

1) $6uv+3u^2-9uw=$
$=3u\cdot 2v+3u\cdot u-3u\cdot 3w=$
$=3u(2v+u-3w).$

Der Faktor $3u$ wurde ausgeklammert.

2) Man kann auch Aggregate ausklammern:

$$3(a+b)-a(a+b)+4b^2(a+b)=(a+b)(3-a+4b^2).$$

3) Manchmal muß man ein Glied des Aggregats erst in ein Produkt umschreiben, indem man den Faktor 1 hinzufügt:

$3a^2+a=$
$=a\cdot 3a+a\cdot 1=$ **Trick:** $\boldsymbol{a=a\cdot 1}$
$=a(3a+1).$

4) Mit Gewalt kann man jeden gewünschten Faktor ausklammern! Wir wollen aus dem Aggregat $\frac{2}{3}x^2-7xy+x$ den Term $\frac{1}{3}x$ ausklammern, damit in der Klammer keine Brüche mehr vorkommen.

$\frac{2}{3}x^2-7xy+x=$
$=\frac{1}{3}x\cdot 2x-\frac{1}{3}x\cdot 21y+\frac{1}{3}x\cdot 3=$
$=\frac{1}{3}x(2x-21y+3).$