



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

Aufgaben

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83493](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83493)

Das Koeffizientenmuster $1 - 3 - 3 - 1$ wiederholt sich beim Ausmultiplizieren, um eine Stelle verschoben, in der zweiten Zeile. Das neue Koeffizientenmuster $1 - 4 - 6 - 4 - 1$ ergibt sich somit recht einfach, indem man nebeneinanderstehende Koeffizienten des vorhergehenden Musters $0 - 1 - 3 - 3 - 1 - 0$ addiert. Setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man eine dreieckige Anordnung von Koeffizienten. Sie ist auch als **Arithmetisches Dreieck** oder **PASCAL-STIFELSCHE Dreieck** bekannt.

	1						
$(a+b)^1$	1	1			$1a + 1b$		
$(a+b)^2$	1	2	1		$1a^2 + 2ab + 1b^2$		
$(a+b)^3$	1	3	3	1	$1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$		
$(a+b)^4$	1	4	6	4	1	$1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$	
$(a+b)^5$	1	5	10	10	5	1	$1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$
.....

Das Arithmetische Dreieck war bereits den Indern des 2. vorchristlichen Jh.s und den Arabern des 11. Jh.s bekannt. Die früheste erhaltene Darstellung dieses Dreiecks enthält die *Untersuchung der Arithmetischen Regeln der Neun Bücher* von YANG Hui aus dem Jahre 1261, die auf den chinesischen Mathematiker QIA Hsian [sprich: Tschia Hsien] (um 1100) zurückgeht (siehe Abbildung 197.1). Die erste gedruckte Darstellung in Europa schmückt das Titelblatt des *Neuen Rechenbuchs* von 1527 des Peter APIAN (1495–1552) (siehe Abbildung 197.2). Benannt ist das Arithmetische Dreieck nach dem deutschen Mathematiker Michael STIFEL (1487–1567) und dem französischen Mathematiker und Philosophen Blaise PASCAL (1623–1662), die die interessanten Eigenschaften dieses Dreiecks erforscht haben.

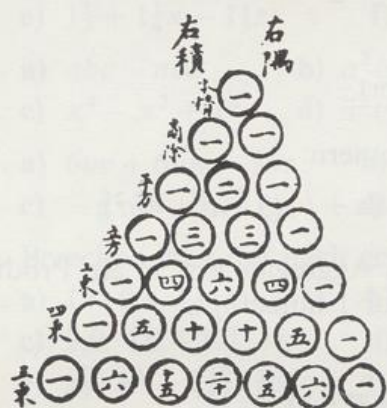


Abb. 197.1 Das Arithmetische Dreieck des YANG Hui (1261)

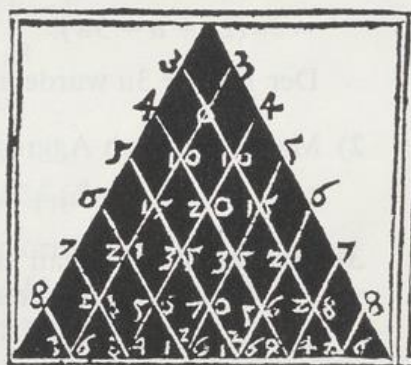


Abb. 197.2 Das Arithmetische Dreieck des Peter APIAN (1527)

Aufgaben

- | | | |
|--------------------|------------------|------------------|
| 1. a) $(2x + 1)^3$ | b) $(1 - 3a)^3$ | c) $(2a + 5b)^3$ |
| d) $(3a - 5b)^3$ | e) $(-a + 4b)^3$ | f) $(-a - 2b)^3$ |

2. a) $(0,1 + u)^3$ b) $(-1,2r + 5s)^3$ c) $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b)^3$
 3. a) $(\frac{1}{2}ab + \frac{2}{3}a)^3$ b) $(\frac{5}{7}x - 2\frac{4}{5}x^2)^3$ c) $(0,2x - 0,5y)^3$
 4. a) $(xy^2 + 2x^2y)^3$ b) $(\frac{5}{9}a^3b^2 - \frac{3}{5}a^2b^3)^3$
 5. Berechne $(a+b)^5$ auf zwei Arten, einmal als $(a+b)(a+b)^4$ und einmal als $(a+b)^2(a+b)^3$.
 6. a) $(2a+1)^4$ b) $(x-3y)^5$ c) $(x-y)^7$

7.5 Die Kunst des Faktorisierens

7.5.1 Einfaches Ausklammern

Beim weiteren Eindringen in die Mathematik im Laufe der nächsten Jahre wirst du feststellen, daß man mit Produkten viel mehr anfangen kann als mit Summen. Daher mußt du Bescheid wissen, wie man Aggregate in Produkte verwandeln kann. Dieses Verwandeln nennt man auch **Faktorisieren** eines Aggregats.

Die einfachste Art des Faktorisierens kennst du bereits als eine Anwendung des verallgemeinerten Distributivgesetzes (Satz 90.2) in der Form des Ausklammerns. Wir vertiefen deine Kenntnisse durch einige

Beispiele:

$$\begin{aligned} 1) \quad & 6uv + 3u^2 - 9uw = \\ & = 3u \cdot 2v + 3u \cdot u - 3u \cdot 3w = \\ & = 3u(2v + u - 3w). \end{aligned}$$

Der Faktor $3u$ wurde ausgeklammert.

2) Man kann auch Aggregate ausklammern:

$$3(a+b) - a(a+b) + 4b^2(a+b) = (a+b)(3 - a + 4b^2).$$

3) Manchmal muß man ein Glied des Aggregats erst in ein Produkt umschreiben, indem man den Faktor 1 hinzufügt:

$$\begin{aligned} 3a^2 + a &= \\ &= a \cdot 3a + a \cdot 1 = \quad \text{Trick: } a = a \cdot 1 \\ &= a(3a + 1). \end{aligned}$$

4) Mit Gewalt kann man jeden gewünschten Faktor ausklammern! Wir wollen aus dem Aggregat $\frac{2}{3}x^2 - 7xy + x$ den Term $\frac{1}{3}x$ ausklammern, damit in der Klammer keine Brüche mehr vorkommen.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x^2 - 7xy + x &= \\ &= \frac{1}{3}x \cdot 2x - \frac{1}{3}x \cdot 21y + \frac{1}{3}x \cdot 3 = \\ &= \frac{1}{3}x(2x - 21y + 3). \end{aligned}$$