



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

7.5 Die Kunst des Faktorisierens

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83493](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83493)

2. a) $(0,1 + u)^3$ b) $(-1,2r + 5s)^3$ c) $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b)^3$
 3. a) $(\frac{1}{2}ab + \frac{2}{3}a)^3$ b) $(\frac{5}{7}x - 2\frac{4}{5}x^2)^3$ c) $(0,2x - 0,5y)^3$
 4. a) $(xy^2 + 2x^2y)^3$ b) $(\frac{5}{9}a^3b^2 - \frac{3}{5}a^2b^3)^3$
 5. Berechne $(a+b)^5$ auf zwei Arten, einmal als $(a+b)(a+b)^4$ und einmal als $(a+b)^2(a+b)^3$.
 6. a) $(2a+1)^4$ b) $(x-3y)^5$ c) $(x-y)^7$

7.5 Die Kunst des Faktorisierens

7.5.1 Einfaches Ausklammern

Beim weiteren Eindringen in die Mathematik im Laufe der nächsten Jahre wirst du feststellen, daß man mit Produkten viel mehr anfangen kann als mit Summen. Daher mußt du Bescheid wissen, wie man Aggregate in Produkte verwandeln kann. Dieses Verwandeln nennt man auch **Faktorisieren** eines Aggregats.

Die einfachste Art des Faktorisierens kennst du bereits als eine Anwendung des verallgemeinerten Distributivgesetzes (Satz 90.2) in der Form des Ausklammerns. Wir vertiefen deine Kenntnisse durch einige

Beispiele:

$$\begin{aligned} 1) \quad & 6uv + 3u^2 - 9uw = \\ & = 3u \cdot 2v + 3u \cdot u - 3u \cdot 3w = \\ & = 3u(2v + u - 3w). \end{aligned}$$

Der Faktor $3u$ wurde ausgeklammert.

2) Man kann auch Aggregate ausklammern:

$$3(a+b) - a(a+b) + 4b^2(a+b) = (a+b)(3 - a + 4b^2).$$

3) Manchmal muß man ein Glied des Aggregats erst in ein Produkt umschreiben, indem man den Faktor 1 hinzufügt:

$$\begin{aligned} 3a^2 + a &= \\ &= a \cdot 3a + a \cdot 1 = \quad \text{Trick: } a = a \cdot 1 \\ &= a(3a + 1). \end{aligned}$$

4) Mit Gewalt kann man jeden gewünschten Faktor ausklammern! Wir wollen aus dem Aggregat $\frac{2}{3}x^2 - 7xy + x$ den Term $\frac{1}{3}x$ ausklammern, damit in der Klammer keine Brüche mehr vorkommen.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x^2 - 7xy + x &= \\ &= \frac{1}{3}x \cdot 2x - \frac{1}{3}x \cdot 21y + \frac{1}{3}x \cdot 3 = \\ &= \frac{1}{3}x(2x - 21y + 3). \end{aligned}$$

- 5) Besonders aufpassen mußt du, wenn du in Potenzen von Aggregaten ausklammerst.

$$\begin{aligned}(8a^2b - 12a)^2 &= \\ &= (4a[2ab - 3])^2 = \\ &= (4a)^2(2ab - 3)^2 = \\ &= 16a^2(2ab - 3)^2.\end{aligned}$$

Mit einiger Übung kannst du bald auf die 2. Zeile unserer Beispiele verzichten, indem du im Kopf jeden Summanden durch den auszuklammernden Term dividierst. Das mußt du aber üben! Dazu dienen die

Aufgaben

1. a) $3st - 4s^2 + s$ b) $ax^2 + bx + x$
 c) $4a^2 - 8a^2 + 12a^5$ d) $\frac{4}{5}ay + \frac{3}{10}by - \frac{2}{15}y^2$
2. a) $\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b$ b) $1\frac{1}{5}x - \frac{6}{5}y + 1,2z$
 c) $\frac{3}{8}u - \frac{1}{32}v$ d) $-\frac{111}{46}s - \frac{74}{69}t$
3. Faktorisiere so, daß in der Klammer keine Bruchzahl mehr steht.
 a) $\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y$ b) $0,4a - 0,5b$
 c) $\frac{1}{2}r + \frac{3}{2}s - t$ d) $-0,01u + 0,1v + w$
 e) $1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{5}z$ f) $-1,2a + \frac{2}{3}b - 1$
4. a) $abc - acd$ b) $a^2b + ab^2 - a^2b^2$
 c) $x^4 - x^3 + x^2$ d) $u^2v^3 + uv^4 - uv^5$
5. a) $6uv + 6uw - 3uz$ b) $3\frac{1}{3}p - 6\frac{2}{3}p^2q$
 c) $-\frac{7}{8}x^4 - \frac{56}{3}x^3$ d) $1\frac{15}{34}u^2v^3z - 2\frac{5}{17}u^3vz^5$
6. Berechne im Kopf nach geeigneter Faktorisierung.
 a) $13 \cdot 9 + 13$ b) $7 \cdot 18 + 13 \cdot 18$
 c) $2,9 \cdot 18 - 1,9 \cdot 18$ d) $27^2 - 17 \cdot 27$
 e) $\frac{17}{49} \cdot 83 + 2\frac{32}{49} \cdot 83$ f) $13^2 + 3 \cdot 13 - 16 \cdot 13$
- 7. a) $108xy - 162x + 216y$
 b) $2\frac{4}{5}xy^4z^2 - 2x^2y^2z^2 - 4\frac{2}{5}x^3y^2z + 1\frac{3}{5}xy^2z^2 - 3\frac{3}{5}x^2y^3z$
- 8. a) $21u^4 - 7u^3 + 23\frac{1}{3}u^2$
 b) $1,3x^3y + 2,35x^2y^2 - 0,9xy^3$
9. Klammere 3 aus.
 a) $18a^2 - 273b$ b) $9x + 4$
 c) $1 - 12x$ d) $a - 1$

10. Klammere -1 aus.

a) $-3a^2 + b^2$ b) $3 - 5x$ c) $-1 - 8ab$ d) $3a^2b + 5x$

11. Klammere $-\frac{2}{3}$ aus.

a) $\frac{4}{3}a - 4\frac{2}{3}b$ b) $8a - \frac{2}{3}$ c) $-1 - \frac{3}{2}b$ d) $2x + 3y$

12. a) $u(v + w) - v(v + w) + w(v + w)$

b) $x(a + b - c) - y(c - a - b) + z(a - c + b)$

c) $m(2a - 3b) + n(3b - 2a) - p(-3b + 2a)$

d) $u(2e - f) - 3v(4e - 2f) + w(3f - 6e)$

13. a) $\frac{3}{4}x(a - b) - \frac{21}{28}y(a - b)$

b) $3,2a(x - 3) + 4,8b(x - 3)$

c) $14x(3y + 2z) - 28y(3y + 2z)$

14. a) $12a^2b^3(7x - 1) + 84ab^4(7x - 1)$

b) $6a^3(1 - x) - 27ab^2(x - 1)$

c) $\frac{7}{4}x^2y(3x - y) + 7xy^2(y - 3x)$

d) $1,2a^2(x - y) + 8,4ab(x - y) - 0,72b^2(y - x)$

15. a) $x(a + b) + a + b$

b) $x(a - b) + a - b$

c) $x(a - b) - a + b$

d) $x(a + b) + a - b$

16. a) $(2\frac{1}{2}x - y)(2\frac{1}{2}a - b) - (1\frac{1}{2}x + y)(\frac{5}{2}a - b)$

• b) $(3,7a^2b + c)(7,3ab^2 - c) + (3,7a^2b + c)(2,7ab^2 + c)$

17. a) $4x^2y^2z - 6xyz^2 + 10x^2y^2z^2$

b) $3a^8b^{12}c^{13} + 27a^7b^{15}c^9 - 18(abc)^{11}$

c) $a^3(-b)^4 - (-a)^4b^3 + (-a)^5(-b)^5$

d) $(x + y)^2(x^2 + y^2) - (x + y)(x^3 + y^3)$

7.5.2 Mehrfaches Ausklammern

In manchen Fällen gelingt ein Faktorisieren auch dann, wenn kein *allen* Gliedern gemeinsamer Faktor vorhanden ist, indem man zunächst aus geeigneten *Teilaggregaten* einen gemeinsamen Faktor heraussetzt.

Dabei gibt es oft mehrere Möglichkeiten des Vorgehens.

Beispiele:

1) Faktorisiere $ax - ay + bx - by$.

1. Möglichkeit:

$$\underline{ax - ay} + \underline{bx - by} =$$

$$= a(x - y) + b(x - y) =$$

$$= (x - y)(a + b)$$

2. Möglichkeit:

$$\underline{ax - ay} + \underline{bx - by} =$$

$$= x(a + b) - y(a + b) =$$

$$= (a + b)(x - y)$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & au + b - bv + av - bu - a = \\
 & = (au + av - a) + (b - bv - bu) = \\
 & = a(u + v - 1) + b(1 - v - u) = \\
 & = a(u + v - 1) - b(u + v - 1) = \\
 & = (u + v - 1)(a - b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & 6a^2b - 3ab^2 - 2a + b = \\
 & = 3ab(2a - b) - 2a + b = \\
 & = 3ab(2a - b) - (2a - b) = \\
 & = (2a - b)(3ab - 1)
 \end{aligned}$$

Aufgaben

1. a) $ax + ay + bx + by$ b) $xs - ys + xt - yt$
 c) $ab + ac - bx - cx$ d) $xz - yz - ax + ay$
2. a) $2ux + 3vy + 2uy + 3vx$ b) $ab + c + b + ac$
 c) $x^2 + ax + ab + bx$ d) $x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1$
3. a) $mx + ny + nx + my + rx + ry$ b) $ap - bp - aq + bq + az - bz$
 c) $ar + br + cr - a - b - c$ d) $eh + fh - gh - ei - fi + gi$
4. a) $ax - cx + 2a + 2b + bx - 2c$ b) $pu - pv + ru - qv - rv + qu$
 c) $x - y - xz + yz - 1 + z$ d) $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5$
5. a) $3,3ax + 3,3ay - 4,4bx - 4,4by$
 b) $0,7pq - 0,9pr + 0,7qs - 0,9rs$
 • c) $4,2uv + 3,5uw + 2w + 2,4v$
 • d) $-8ax^2 + 9bx^2 - 3,6by^2 + 3,2ay^2$
6. a) $7ax + 3ay - \frac{7}{5}bx - \frac{3}{5}by$
 b) $az^2 + \frac{3}{2}axz + \frac{5}{7}bz^2 + \frac{15}{14}bxz$
 c) $0,2xyz - 0,3uxy - 0,6y^2z + 0,9uy^2$
 d) $uv^3 - \frac{1}{4}uv^2 + \frac{3}{2}av^3 - \frac{3}{8}av^2$
7. a) $ax - 7bx + 4ay - 28by$
 b) $12ax - 2ay - 18bx + 3by$
 c) $x(a + b - c) - y(a + b - c) + (x - y)$
 d) $y(a - b - c) + x(b + c - a) + (x - y)$
- 8. a) $(a + 2b)(3ux - vy) - (uy - 3vx)(a + 2b)$
 b) $(7xz - 3y)(3a + 4b) - (3a + 4b)(yz - 21x)$
 c) $(2st - 3ru)(5p - q) + (3rt - 2su)(5p - q)$
 d) $(7d - 2)(10eg - 2fh) + (2 - 7d)(5eh - 4fg)$

9. a) $64au + 36eu + 64ax + 36ex - 44bu - 44bx$
 b) $24ap + 54aq - 36bp - 81bq + 60cp + 135cq$
 c) $\frac{1}{3}ay^2 - \frac{1}{2}by^2 + \frac{4}{3}ay - \frac{1}{3}a - 2by + \frac{1}{2}b$
 d) $\frac{1}{2}r^3sv - \frac{7}{10}r^2s^2v + \frac{7}{15}r^2s^2u - \frac{1}{3}r^3su + \frac{1}{5}r^4u - \frac{3}{10}r^4v$

7.5.3. Faktorisieren mit Hilfe der binomischen Formeln

Schreibt man die binomischen Formeln von Satz 187.1 in der Form

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad \text{bzw.} \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \quad \text{bzw.}$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

so kann man gewisse Aggregate mit ihrer Hilfe auch faktorisieren.

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} u^2 + 12u + 36 &= \\ &= \underbrace{u^2}_{a^2} + 2 \cdot \underbrace{u}_{a} \cdot \underbrace{6}_{b} + \underbrace{6^2}_{b^2} = (u + 6)^2 \end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} 16x^4 - 8x^2y^3 + y^6 &= \\ &= (\underbrace{4x^2}_{a})^2 - 2 \cdot \underbrace{4x^2}_{a} \cdot \underbrace{y^3}_{b} + (\underbrace{y^3}_{b})^2 = (4x^2 - y^3)^2 \end{aligned}$$

Merke: Bestimme zunächst die beiden Glieder, deren Quadrate im gegebenen Ausdruck vorkommen, und prüfe anschließend, ob ihr doppeltes Produkt mit dem entsprechenden Glied des gegebenen Aggregats übereinstimmt.

Beispiel 3:

$$\begin{aligned} (3x + 7y)^2 - 25x^2 &= \\ &= (\underbrace{3x + 7y}_{a})^2 - (\underbrace{5x}_{b})^2 = (3x + 7y + 5x)(3x + 7y - 5x) = \\ &= (8x + 7y)(7y - 2x) \end{aligned}$$

Eine *Differenz* zweier Quadrate läßt sich *stets* in ein Produkt verwandeln. Dagegen ist dies bei einer *Summe* zweier Quadrate *nicht* möglich.* Bei 3. Potenzen dagegen lassen sich sowohl die Differenz wie auch die Summe faktorisieren. Es gilt nämlich:

* Produktzerlegungen von der Form $x^2 + y^2 = 1 \cdot (x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2) = \dots$ usw., die immer möglich sind, interessieren in diesem Zusammenhang natürlich nicht.

$$\text{Satz 203.1: } a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Die Richtigkeit dieser Formeln siehst du sofort ein, wenn du die rechten Seiten ausmultiplizierst (Aufgabe 204/16).

Beispiel 4:

$$0,027x^3 + 1000y^3 = (0,3x + 10y)(0,09x^2 - 3xy + 100y^2)$$

Aufgaben

1. a) $x^2 - 8x + 16$ b) $u^2 - 6uv + 9v^2$
 c) $4z^2 + 4pz + p^2$ d) $49p^2 - 112pq + 64q^2$
 e) $9y^4 + 30y^2 + 25$ f) $x^{10} + 4x^5 + 4$
2. a) $a^2 + a + \frac{1}{4}$ b) $-84a + 9a^2 + 196$
 c) $0,16x^6 - 0,24x^3y + 0,09y^2$ d) $2,25 - 3x + x^2$
 e) $0,36r^2 - 4,8rs + 16s^2$ f) $4x^2 + 52x + 169$
- 3. a) $\frac{4}{9}s^2 + \frac{16}{15}st + \frac{16}{25}t^2$ b) $\frac{9}{16}u^2 - \frac{5}{4}uv + \frac{25}{36}v^2$
 c) $1,21 + a + \frac{25}{121}a^2$ d) $1,96x^4 - 2,8x^2 + 1$
4. a) $625 - 196a^2$ b) $1 - 81x^2$
 c) $\frac{9}{16}u^2 - \frac{25}{36}v^2$ d) $0,49a^2 - 0,01b^2$
5. a) $2,25 - 0,0256t^2$ b) $\frac{64}{289}p^2 - 3,61q^2$
 c) $400x^2y^2 - 121u^2v^2$ d) $\frac{169}{324}x^4 - 1$
- 6. a) $20x^2 - 45y^2$ b) $3,6x^2 - 4,9y^2$
 c) $175p^4 - 252q^4$ d) $48(xy)^2 - 147u^2v^2$
7. a) $6a^2 + 12ab + 6b^2$ b) $7x^2 - 7x + 1\frac{3}{4}$
 c) $a^3 + 2a^2 + a$ d) $3x^7 - 12x^5 + 12x^3$
8. a) $a^4 - b^4$ b) $x^6 - y^6$ c) $x^8 - y^8$
 d) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ e) $81 - 72u^2 + 16u^4$ • f) $64x^6 - 1$
9. a) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$ b) $4x^2 - 20x + 25 - 9y^2$
 c) $36a^2 + 48ab + 16b^2 - 81c^2$ d) $196u^2 - 4uv + \frac{v^2}{49} - \frac{1}{121}$
 e) $a^2 + 2ab + b^2 - x^2 + 2xy - y^2$ • f) $16u^2 - v^2 + 2v - 1$
10. a) $(2a + 3b)^2 - 16a^2$ b) $(2a - 3b)^2 - 16a^2$
 c) $16a^2 - (2a + 3b)^2$ d) $16a^2 - (2a - 3b)^2$

11. a) $(13x + 14y)^2 - (13x - 14y)^2$
 b) $(0,1x - 0,2y)^2 - (0,1x + 0,2y)^2$
 c) $(\frac{3}{4}x + \frac{4}{3}y)^2 - (\frac{3}{4}x - \frac{4}{3}y)^2$
 d) $(1\frac{3}{4}x - 2\frac{1}{3}y)^2 - (1\frac{3}{4}x + 2\frac{1}{3}y)^2$
12. a) $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$ b) $x^2 - y^2 - 2yz - z^2$
 • c) $2,89a^2 - 0,64b^2 + 2,08bc - 1,69c^2$
 • d) $3,24x^2 - 2,56y^2 - 3,52yz - 1,21z^2$
- 13. a) $2a^2 - 2b^2 + a^2x - b^2x$ b) $2m^2x - 8n^2x + 3m^2y - 12n^2y$
 c) $12a^2x - 2b^2y - 3b^2x + 8a^2y$
 d) $36p^2x^2 - 9p^2y^2 - 16q^2x^2 + 4q^2y^2$
- 14. a) $9a^2x - 9a^2y - 12abx + 12aby + 4b^2y - 4b^2x$
 • b) $\frac{1}{9}a^2x^2 - \frac{1}{6}a^2xy + \frac{1}{4}a^2y^2 - \frac{1}{9}b^2x^2 + \frac{1}{6}b^2xy - \frac{1}{4}b^2y^2$
15. Verwandle, wenn möglich, in ein Produkt.
 a) $a^2x^2 - a^2y^2 - b^2x^2 + b^2y^2$ b) $36p^2 + 21pq + 64q^2$
 c) $-a^2 - 2ab - b^2 + 1$ d) $a^2 - 2ab + b^2 - 1$
 e) $u^2 + uv + v^2$ f) $a^4 + b^4$
 g) $4a^2 - 5b^2$ h) $a^2 + 2ab + b^2 + 1$
16. a) Beweise Satz 203.1.
 b) $a^3 - 8b^3$ c) $243 + 216a^6$ d) $\frac{64}{125}x^3 - 1$
 e) $\frac{243}{512}a^3 + 2\frac{10}{27}b^3$ f) $0,001x^3 + y^3z^6$ g) $0,729u^3 - 1000000v^3$

7.5.4 Faktorisieren durch Probieren

Wenn du $a^2 + 5a + 6$ in ein Produkt verwandeln sollst, so erscheint dir dies sicherlich auf den ersten Blick als aussichtslos. Erstaunlicherweise kommt man hier aber mit einigen kleinen Überlegungen und einem geschickten Probieren zum Ziel.

Da das Aggregat mit a^2 beginnt und aus 3 Gliedern besteht, versuchen wir den Ansatz

$$a^2 + 5a + 6 = (a \square ?)(a \triangle ?).$$

Die Symbole $\square$ und $\triangle$ stehen dabei für $+$ oder $-$.

Die für die Fragezeichen zu wählenden Zahlen müssen, miteinander multipliziert, 6 ergeben. 6 läßt sich mit natürlichen Zahlen als $2 \cdot 3$, aber auch als $1 \cdot 6$ schreiben. Wir versuchen es mit $2 \cdot 3$ und setzen also an

$$a^2 + 5a + 6 = (a \square 2)(a \triangle 3).$$

Von den 4 möglichen Kombinationen $++$, $+-$, $-+$ und $--$ scheiden die beiden mittleren aus, da wir sonst -6 für das letzte Glied erhielten. Die Kom-

bination $++$ führt zum richtigen mittleren Glied $5a$. Also gilt die Faktorisierung

$$a^2 + 5a + 6 = (a + 2)(a + 3).$$

Hätten wir 6 als $1 \cdot 6$ zerlegt, so ergäbe $(a \square 1)(a \triangle 6)$ für keine der 4 Rechenzeichenkombinationen das mittlere Glied $5a$. Man muß also ein Gespür dafür haben! Bei $a^2 + 5a - 6$ führt nämlich gerade $6 = 1 \cdot 6$ zum Ziel:

$$a^2 + 5a - 6 = (a - 1)(a + 6).$$

Eine derartige Faktorisierung durch Probieren wird natürlich nicht immer gelingen. Beim Versuch hilft

Regel 205.1: Bei Trinomen der Form $x^2 + bx + c$ mit ganzen Zahlen b und c zerlegt man c in ein Produkt zweier natürlicher Zahlen und versucht, die Rechenzeichenkombination so zu bestimmen, daß sich die richtigen Rechenzeichen und das mittlere Glied ergeben.
Hat das Trinom die Form $ax^2 + bx + c$, so klammert man erst a aus.

Beispiel: $\frac{3}{4}x^2 - 6x + 9 = \frac{3}{4}(x^2 - 8x + 12) = \frac{3}{4}(x - 2)(x - 6)$

Aufgaben

- | | |
|--|--|
| 1. a) $x^2 + 7x + 12$ | b) $x^2 - x - 12$ |
| c) $x^2 + 11x + 10$ | d) $x^2 + 9x - 10$ |
| 2. a) $u^2 - 13u + 40$ | b) $a^2 - 20a + 96$ |
| c) $z^2 - 10z + 9$ | d) $x^2 - x - 4$ |
| • 3. a) $x^2 - 5xy + 4y^2$ | b) $y^2 + yz - 56z^2$ |
| c) $a^2 - 9ab + 18b^2$ | d) $u^2 - 4uv - 21v^2$ |
| • 4. a) $x^2 + 2x - 48$ | b) $x^2 - 2x - 48$ |
| c) $x^2 - 2x + 48$ | d) $x^2 + 2x + 48$ |
| 5. a) $2x^2 + 16x + 30$ | b) $7x^2 - 14x - 105$ |
| c) $\frac{3}{4}x^2 + 6x + 9$ | d) $-x^2 + 12x - 35$ |
| • 6. a) $3x^2 - 39x + 108$ | b) $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9$ |
| c) $-\frac{1}{2}x^2 + 9x - 18$ | d) $0,1a^2 - 1,1a + 1$ |
| • 7. a) $-0,4z^2 + 2,8z - 4,8$ | b) $\frac{1}{4}p^2 - pq - \frac{21}{4}q^2$ |
| c) $\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{3}x + 8$ | d) $\frac{5}{4}y^2 + 25y + 120$ |