Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

7.5.1 Einfaches Ausklammern

2. **a)** $(0{,}1+u)^3$ **b)** $(-1{,}2r+5s)^3$ **c)** $(1\frac{1}{2}a+1\frac{1}{3}b)^3$

3. **a)** $(\frac{1}{2}ab+\frac{2}{3}a)^3$ **b)** $(\frac{5}{7}x-2\,\frac{4}{5}x^2)^3$ **c)** $(0{,}2x-0{,}5y)^3$

4. **a)** $(xy^2+2x^2y)^3$ **b)** $(\frac{5}{9}a^3b^2-\frac{3}{5}a^2b^3)^3$

5. Berechne $(a+b)^5$ auf zwei Arten, einmal als $(a+b)(a+b)^4$ und einmal als $(a+b)^2(a+b)^3$.

6. **a)** $(2a+1)^4$ **b)** $(x-3y)^5$ **c)** $(x-y)^7$

7.5 Die Kunst des Faktorisierens

7.5.1 Einfaches Ausklammern

Beim weiteren Eindringen in die Mathematik im Laufe der nächsten Jahre wirst du feststellen, daß man mit Produkten viel mehr anfangen kann als mit Summen. Daher mußt du Bescheid wissen, wie man Aggregate in Produkte verwandeln kann. Dieses Verwandeln nennt man auch **Faktorisieren** eines Aggregats.
Die einfachste Art des Faktorisierens kennst du bereits als eine Anwendung des verallgemeinerten Distributivgesetzes (Satz 90.2) in der Form des Ausklammerns. Wir vertiefen deine Kenntnisse durch einige

Beispiele:

1) $6uv+3u^2-9uw=$
$=3u\cdot 2v+3u\cdot u-3u\cdot 3w=$
$=3u(2v+u-3w).$

Der Faktor $3u$ wurde ausgeklammert.

2) Man kann auch Aggregate ausklammern:

$3(a+b)-a(a+b)+4b^2(a+b)=(a+b)(3-a+4b^2).$

3) Manchmal muß man ein Glied des Aggregats erst in ein Produkt umschreiben, indem man den Faktor 1 hinzufügt:

$3a^2+a=$
$=a\cdot 3a+a\cdot 1=$ **Trick:** $\boldsymbol{a=a\cdot 1}$
$=a(3a+1).$

4) Mit Gewalt kann man jeden gewünschten Faktor ausklammern! Wir wollen aus dem Aggregat $\frac{2}{3}x^2-7xy+x$ den Term $\frac{1}{3}x$ ausklammern, damit in der Klammer keine Brüche mehr vorkommen.

$\frac{2}{3}x^2-7xy+x=$
$=\frac{1}{3}x\cdot 2x-\frac{1}{3}x\cdot 21y+\frac{1}{3}x\cdot 3=$
$=\frac{1}{3}x(2x-21y+3).$

5) Besonders aufpassen mußt du, wenn du in Potenzen von Aggregaten ausklammerst.

$$\begin{aligned}&(8a^2b-12a)^2=\\&=(4a[2ab-3])^2=\\&=(4a)^2(2ab-3)^2=\\&=16a^2(2ab-3)^2.\end{aligned}$$

Mit einiger Übung kannst du bald auf die 2. Zeile unserer Beispiele verzichten, indem du im Kopf jeden Summanden durch den auszuklammernden Term dividierst. Das mußt du aber üben! Dazu dienen die

Aufgaben

1. **a)** $3st-4s^2+s$ **b)** ax^2+bx+x
c) $4a^2-8a^2+12a^5$ **d)** $\frac{4}{5}ay+\frac{3}{10}by-\frac{2}{15}y^2$

2. **a)** $\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}b$ **b)** $1\frac{1}{5}x-\frac{6}{5}y+1{,}2z$
c) $\frac{3}{8}u-\frac{15}{32}v$ **d)** $-\frac{111}{46}s-\frac{74}{69}t$

3. Faktorisiere so, daß in der Klammer keine Bruchzahl mehr steht.
a) $\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}y$ **b)** $0{,}4a-0{,}5b$
c) $\frac{1}{2}r+\frac{3}{2}s-t$ **d)** $-0{,}01u+0{,}1v+w$
e) $1\frac{1}{3}+1\frac{1}{4}x-1\frac{1}{5}z$ **f)** $-1{,}2a+\frac{2}{3}b-1$

4. **a)** $abc-acd$ **b)** $a^2b+ab^2-a^2b^2$
c) $x^4-x^3+x^2$ **d)** $u^2v^3+uv^4-uv^5$

5. **a)** $6uv+6uw-3uz$ **b)** $3\frac{1}{3}p-6\frac{2}{3}p^2q$
c) $-\frac{7}{8}x^4-\frac{56}{3}x^3$ **d)** $1\frac{15}{34}u^2v^3z-2\frac{5}{17}u^3vz^5$

6. Berechne im Kopf nach geeigneter Faktorisierung.
a) $13\cdot 9+13$ **b)** $7\cdot 18+13\cdot 18$
c) $2{,}9\cdot 18-1{,}9\cdot 18$ **d)** $27^2-17\cdot 27$
e) $\frac{17}{49}\cdot 83+2\frac{32}{49}\cdot 83$ **f)** $13^2+3\cdot 13-16\cdot 13$

•**7.** **a)** $108xy-162x+216y$
b) $2\frac{4}{5}xy^4z^2-2x^2y^2z^2-4\frac{2}{5}x^3y^2z+1\frac{3}{5}xy^2z^2-3\frac{3}{5}x^2y^3z$

•**8.** **a)** $21u^4-7u^3+23\frac{1}{3}u^2$
b) $1{,}3x^3y+2{,}35x^2y^2-0{,}9xy^3$

9. Klammere 3 aus.
a) $18a^2-273b$ **b)** $9x+4$
c) $1-12x$ **d)** $a-1$

10. Klammere -1 aus.
a) $-3a^2 + b^2$ **b)** $3 - 5x$ **c)** $-1 - 8ab$ **d)** $3a^2b + 5x$

11. Klammere $-\frac{2}{3}$ aus.
a) $\frac{4}{3}a - 4\frac{2}{3}b$ **b)** $8a - \frac{2}{3}$ **c)** $-1 - \frac{3}{2}b$ **d)** $2x + 3y$

12. a) $u(v+w) - v(v+w) + w(v+w)$
b) $x(a+b-c) - y(c-a-b) + z(a-c+b)$
c) $m(2a-3b) + n(3b-2a) - p(-3b+2a)$
d) $u(2e-f) - 3v(4e-2f) + w(3f-6e)$

13. a) $\frac{3}{4}x(a-b) - \frac{21}{28}y(a-b)$ **b)** $3{,}2a(x-3) + 4{,}8b(x-3)$
c) $14x(3y+2z) - 28y(3y+2z)$

14. a) $12a^2b^3(7x-1) + 84ab^4(7x-1)$
b) $6a^3(1-x) - 27ab^2(x-1)$
c) $\frac{7}{4}x^2y(3x-y) + 7xy^2(y-3x)$
d) $1{,}2a^2(x-y) + 8{,}4ab(x-y) - 0{,}72b^2(y-x)$

15. a) $x(a+b) + a + b$ **b)** $x(a-b) + a - b$
c) $x(a-b) - a + b$ **d)** $x(a+b) + a - b$

16. a) $(2\frac{1}{2}x - y)(2\frac{1}{2}a - b) - (1\frac{1}{2}x + y)(\frac{5}{2}a - b)$
•**b)** $(3{,}7a^2b + c)(7{,}3ab^2 - c) + (3{,}7a^2b + c)(2{,}7ab^2 + c)$

17. a) $4x^2y^2z - 6xyz^2 + 10x^2y^2z^2$
b) $3a^8b^{12}c^{13} + 27a^7b^{15}c^9 - 18(abc)^{11}$
c) $a^3(-b)^4 - (-a)^4b^3 + (-a)^5(-b)^5$
d) $(x+y)^2(x^2+y^2) - (x+y)(x^3+y^3)$

7.5.2 Mehrfaches Ausklammern

In manchen Fällen gelingt ein Faktorisieren auch dann, wenn kein *allen* Gliedern gemeinsamer Faktor vorhanden ist, indem man zunächst aus geeigneten *Teilaggregaten* einen gemeinsamen Faktor heraussetzt.
Dabei gibt es oft mehrere Möglichkeiten des Vorgehens.

Beispiele:

1) Faktorisiere $ax - ay + bx - by$.

1. Möglichkeit:
$\underline{ax - ay} + \underline{bx - by} =$
$= a(x-y) + b(x-y) =$
$= (x-y)(a+b)$

2. Möglichkeit:
$\underline{ax} - \underline{ay} + \underline{bx} - \underline{by} =$
$= x(a+b) - y(a+b) =$
$= (a+b)(x-y)$