



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

7.5.2 Mehrfaches Ausklammern

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83493](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83493)

10. Klammere -1 aus.

a) $-3a^2 + b^2$ b) $3 - 5x$ c) $-1 - 8ab$ d) $3a^2b + 5x$

11. Klammere $-\frac{2}{3}$ aus.

a) $\frac{4}{3}a - 4\frac{2}{3}b$ b) $8a - \frac{2}{3}$ c) $-1 - \frac{3}{2}b$ d) $2x + 3y$

12. a) $u(v + w) - v(v + w) + w(v + w)$

b) $x(a + b - c) - y(c - a - b) + z(a - c + b)$

c) $m(2a - 3b) + n(3b - 2a) - p(-3b + 2a)$

d) $u(2e - f) - 3v(4e - 2f) + w(3f - 6e)$

13. a) $\frac{3}{4}x(a - b) - \frac{21}{28}y(a - b)$

b) $3,2a(x - 3) + 4,8b(x - 3)$

c) $14x(3y + 2z) - 28y(3y + 2z)$

14. a) $12a^2b^3(7x - 1) + 84ab^4(7x - 1)$

b) $6a^3(1 - x) - 27ab^2(x - 1)$

c) $\frac{7}{4}x^2y(3x - y) + 7xy^2(y - 3x)$

d) $1,2a^2(x - y) + 8,4ab(x - y) - 0,72b^2(y - x)$

15. a) $x(a + b) + a + b$

b) $x(a - b) + a - b$

c) $x(a - b) - a + b$

d) $x(a + b) + a - b$

16. a) $(2\frac{1}{2}x - y)(2\frac{1}{2}a - b) - (1\frac{1}{2}x + y)(\frac{5}{2}a - b)$

• b) $(3,7a^2b + c)(7,3ab^2 - c) + (3,7a^2b + c)(2,7ab^2 + c)$

17. a) $4x^2y^2z - 6xyz^2 + 10x^2y^2z^2$

b) $3a^8b^{12}c^{13} + 27a^7b^{15}c^9 - 18(abc)^{11}$

c) $a^3(-b)^4 - (-a)^4b^3 + (-a)^5(-b)^5$

d) $(x + y)^2(x^2 + y^2) - (x + y)(x^3 + y^3)$

7.5.2 Mehrfaches Ausklammern

In manchen Fällen gelingt ein Faktorisieren auch dann, wenn kein *allen* Gliedern gemeinsamer Faktor vorhanden ist, indem man zunächst aus geeigneten *Teilaggregaten* einen gemeinsamen Faktor heraussetzt.

Dabei gibt es oft mehrere Möglichkeiten des Vorgehens.

Beispiele:

1) Faktorisiere $ax - ay + bx - by$.

1. Möglichkeit:

$$\underline{ax - ay} + \underline{bx - by} =$$

$$= a(x - y) + b(x - y) =$$

$$= (x - y)(a + b)$$

2. Möglichkeit:

$$\underline{ax - ay} + \underline{bx - by} =$$

$$= x(a + b) - y(a + b) =$$

$$= (a + b)(x - y)$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & au + b - bv + av - bu - a = \\
 & = (au + av - a) + (b - bv - bu) = \\
 & = a(u + v - 1) + b(1 - v - u) = \\
 & = a(u + v - 1) - b(u + v - 1) = \\
 & = (u + v - 1)(a - b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & 6a^2b - 3ab^2 - 2a + b = \\
 & = 3ab(2a - b) - 2a + b = \\
 & = 3ab(2a - b) - (2a - b) = \\
 & = (2a - b)(3ab - 1)
 \end{aligned}$$

Aufgaben

1. a) $ax + ay + bx + by$ b) $xs - ys + xt - yt$
 c) $ab + ac - bx - cx$ d) $xz - yz - ax + ay$
2. a) $2ux + 3vy + 2uy + 3vx$ b) $ab + c + b + ac$
 c) $x^2 + ax + ab + bx$ d) $x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1$
3. a) $mx + ny + nx + my + rx + ry$ b) $ap - bp - aq + bq + az - bz$
 c) $ar + br + cr - a - b - c$ d) $eh + fh - gh - ei - fi + gi$
4. a) $ax - cx + 2a + 2b + bx - 2c$ b) $pu - pv + ru - qv - rv + qu$
 c) $x - y - xz + yz - 1 + z$ d) $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5$
5. a) $3,3ax + 3,3ay - 4,4bx - 4,4by$
 b) $0,7pq - 0,9pr + 0,7qs - 0,9rs$
 • c) $4,2uv + 3,5uw + 2w + 2,4v$
 • d) $-8ax^2 + 9bx^2 - 3,6by^2 + 3,2ay^2$
6. a) $7ax + 3ay - \frac{7}{5}bx - \frac{3}{5}by$
 b) $az^2 + \frac{3}{2}axz + \frac{5}{7}bz^2 + \frac{15}{14}bxz$
 c) $0,2xyz - 0,3uxy - 0,6y^2z + 0,9uy^2$
 d) $uv^3 - \frac{1}{4}uv^2 + \frac{3}{2}av^3 - \frac{3}{8}av^2$
7. a) $ax - 7bx + 4ay - 28by$
 b) $12ax - 2ay - 18bx + 3by$
 c) $x(a + b - c) - y(a + b - c) + (x - y)$
 d) $y(a - b - c) + x(b + c - a) + (x - y)$
- 8. a) $(a + 2b)(3ux - vy) - (uy - 3vx)(a + 2b)$
 b) $(7xz - 3y)(3a + 4b) - (3a + 4b)(yz - 21x)$
 c) $(2st - 3ru)(5p - q) + (3rt - 2su)(5p - q)$
 d) $(7d - 2)(10eg - 2fh) + (2 - 7d)(5eh - 4fg)$

9. a) $64au + 36eu + 64ax + 36ex - 44bu - 44bx$
 b) $24ap + 54aq - 36bp - 81bq + 60cp + 135cq$
 c) $\frac{1}{3}ay^2 - \frac{1}{2}by^2 + \frac{4}{3}ay - \frac{1}{3}a - 2by + \frac{1}{2}b$
 d) $\frac{1}{2}r^3sv - \frac{7}{10}r^2s^2v + \frac{7}{15}r^2s^2u - \frac{1}{3}r^3su + \frac{1}{5}r^4u - \frac{3}{10}r^4v$

7.5.3. Faktorisieren mit Hilfe der binomischen Formeln

Schreibt man die binomischen Formeln von Satz 187.1 in der Form

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad \text{bzw.} \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \quad \text{bzw.}$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

so kann man gewisse Aggregate mit ihrer Hilfe auch faktorisieren.

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} u^2 + 12u + 36 &= \\ &= \underbrace{u^2}_{a^2} + 2 \cdot \underbrace{u}_a \cdot \underbrace{6}_b + \underbrace{6^2}_{b^2} = (u + 6)^2 \end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} 16x^4 - 8x^2y^3 + y^6 &= \\ &= (\underbrace{4x^2}_a)^2 - 2 \cdot \underbrace{4x^2}_a \cdot \underbrace{y^3}_b + (\underbrace{y^3}_b)^2 = (4x^2 - y^3)^2 \end{aligned}$$

Merke: Bestimme zunächst die beiden Glieder, deren Quadrate im gegebenen Ausdruck vorkommen, und prüfe anschließend, ob ihr doppeltes Produkt mit dem entsprechenden Glied des gegebenen Aggregats übereinstimmt.

Beispiel 3:

$$\begin{aligned} (3x + 7y)^2 - 25x^2 &= \\ &= (\underbrace{3x + 7y}_a)^2 - (\underbrace{5x}_b)^2 = (3x + 7y + 5x)(3x + 7y - 5x) = \\ &= (8x + 7y)(7y - 2x) \end{aligned}$$

Eine *Differenz* zweier Quadrate läßt sich *stets* in ein Produkt verwandeln. Dagegen ist dies bei einer *Summe* zweier Quadrate *nicht* möglich.* Bei 3. Potenzen dagegen lassen sich sowohl die Differenz wie auch die Summe faktorisieren. Es gilt nämlich:

* Produktzerlegungen von der Form $x^2 + y^2 = 1 \cdot (x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2) = \dots$ usw., die immer möglich sind, interessieren in diesem Zusammenhang natürlich nicht.