Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

7.5.3 Faktorisieren mit Hilfe der binomischen Formeln

9. **a)** $64au + 36eu + 64ax + 36ex - 44bu - 44bx$

b) $24ap + 54aq - 36bp - 81bq + 60cp + 135cq$

• c) $\frac{1}{3}ay^2 - \frac{1}{2}by^2 + \frac{4}{3}ay - \frac{1}{3}a - 2by + \frac{1}{2}b$

• d) $\frac{1}{2}r^3sv - \frac{7}{10}r^2s^2v + \frac{7}{15}r^2s^2u - \frac{1}{3}r^3su + \frac{1}{5}r^4u - \frac{3}{10}r^4v$

7.5.3. Faktorisieren mit Hilfe der binomischen Formeln

Schreibt man die binomischen Formeln von Satz 187.1 in der Form

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ bzw. $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ bzw.
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$,

so kann man gewisse Aggregate mit ihrer Hilfe auch faktorisieren.

Beispiel 1:

$$u^2 + 12u + 36 =$$
$$= \underbrace{u}_{a}^2 + 2 \cdot \underbrace{u}_{a} \cdot \underbrace{6}_{b} + \underbrace{6}_{b}^2 = (u+6)^2$$

Beispiel 2:

$$16x^4 - 8x^2y^3 + y^6 =$$
$$= (\underbrace{4x^2}_{a})^2 - 2 \cdot \underbrace{4x^2}_{a} \cdot \underbrace{y^3}_{b} + (\underbrace{y^3}_{b})^2 = (4x^2 - y^3)^2$$

Merke: Bestimme zunächst die beiden Glieder, deren Quadrate im gegebenen Ausdruck vorkommen, und prüfe anschließend, ob ihr doppeltes Produkt mit dem entsprechenden Glied des gegebenen Aggregats übereinstimmt.

Beispiel 3:

$$(3x + 7y)^2 - 25x^2 =$$
$$= (\underbrace{3x + 7y}_{a})^2 - (\underbrace{5x}_{b})^2 = (3x + 7y + 5x)(3x + 7y - 5x) =$$
$$= (8x + 7y)(7y - 2x)$$

Eine *Differenz* zweier Quadrate läßt sich *stets* in ein Produkt verwandeln. Dagegen ist dies bei einer *Summe* zweier Quadrate *nicht* möglich.* Bei 3. Potenzen dagegen lassen sich sowohl die Differenz wie auch die Summe faktorisieren. Es gilt nämlich:

* Produktzerlegungen von der Form $x^2 + y^2 = 1 \cdot (x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2) = \ldots$ usw., die immer möglich sind, interessieren in diesem Zusammenhang natürlich nicht.

Satz 203.1: $\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$
$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 - ab + b^2)}$

Die Richtigkeit dieser Formeln siehst du sofort ein, wenn du die rechten Seiten ausmultiplizierst (Aufgabe 204/**16**).

Beispiel 4:

$$0{,}027x^3 + 1000y^3 = (0{,}3x + 10y)(0{,}09x^2 - 3xy + 100y^2)$$

Aufgaben

1. a) $x^2 - 8x + 16$ **b)** $u^2 - 6uv + 9v^2$
c) $4z^2 + 4pz + p^2$ **d)** $49p^2 - 112pq + 64q^2$
e) $9y^4 + 30y^2 + 25$ **f)** $x^{10} + 4x^5 + 4$

2. a) $a^2 + a + \frac{1}{4}$ **b)** $-84a + 9a^2 + 196$
c) $0{,}16x^6 - 0{,}24x^3y + 0{,}09y^2$ **d)** $2{,}25 - 3x + x^2$
e) $0{,}36r^2 - 4{,}8rs + 16s^2$ **f)** $4x^2 + 52x + 169$

•**3. a)** $\frac{4}{9}s^2 + \frac{16}{15}st + \frac{16}{25}t^2$ **b)** $\frac{9}{16}u^2 - \frac{5}{4}uv + \frac{25}{36}v^2$
c) $1{,}21 + a + \frac{25}{121}a^2$ **d)** $1{,}96x^4 - 2{,}8x^2 + 1$

4. a) $625 - 196a^2$ **b)** $1 - 81x^2$
c) $\frac{9}{16}u^2 - \frac{25}{36}v^2$ **d)** $0{,}49a^2 - 0{,}01b^2$

5. a) $2{,}25 - 0{,}0256t^2$ **b)** $\frac{64}{289}p^2 - 3{,}61q^2$
c) $400x^2y^2 - 121u^2v^2$ **d)** $\frac{169}{324}x^4 - 1$

•**6. a)** $20x^2 - 45y^2$ **b)** $3{,}6x^2 - 4{,}9y^2$
c) $175p^4 - 252q^4$ **d)** $48(xy)^2 - 147u^2v^2$

7. a) $6a^2 + 12ab + 6b^2$ **b)** $7x^2 - 7x + 1\frac{3}{4}$
c) $a^3 + 2a^2 + a$ **d)** $3x^7 - 12x^5 + 12x^3$

8. a) $a^4 - b^4$ **b)** $x^6 - y^6$ **c)** $x^8 - y^8$
d) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ **e)** $81 - 72u^2 + 16u^4$ ⁝**f)** $64x^6 - 1$

9. a) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$ **b)** $4x^2 - 20x + 25 - 9y^2$
c) $36a^2 + 48ab + 16b^2 - 81c^2$ **d)** $196u^2 - 4uv + \dfrac{v^2}{49} - \dfrac{1}{121}$
e) $a^2 + 2ab + b^2 - x^2 + 2xy - y^2$ ⁝**f)** $16u^2 - v^2 + 2v - 1$

10. a) $(2a + 3b)^2 - 16a^2$ **b)** $(2a - 3b)^2 - 16a^2$
c) $16a^2 - (2a + 3b)^2$ **d)** $16a^2 - (2a - 3b)^2$