Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

7.5.4 Faktorisieren durch Probieren

11. a) $(13x+14y)^2-(13x-14y)^2$
b) $(0{,}1x-0{,}2y)^2-(0{,}1x+0{,}2y)^2$
c) $(\frac{3}{4}x+\frac{4}{3}y)^2-(\frac{3}{4}x-\frac{4}{3}y)^2$
d) $(1\frac{3}{4}x-2\frac{1}{3}y)^2-(1\frac{3}{4}x+2\frac{1}{3}y)^2$

12. a) $a^2-b^2-c^2+2bc$ **b)** $x^2-y^2-2yz-z^2$
• **c)** $2{,}89a^2-0{,}64b^2+2{,}08bc-1{,}69c^2$
• **d)** $3{,}24x^2-2{,}56y^2-3{,}52yz-1{,}21z^2$

•**13. a)** $2a^2-2b^2+a^2x-b^2x$ **b)** $2m^2x-8n^2x+3m^2y-12n^2y$
c) $12a^2x-2b^2y-3b^2x+8a^2y$
d) $36p^2x^2-9p^2y^2-16q^2x^2+4q^2y^2$

•**14. a)** $9a^2x-9a^2y-12abx+12aby+4b^2y-4b^2x$
:b) $\frac{1}{9}a^2x^2-\frac{1}{6}a^2xy+\frac{1}{4}a^2y^2-\frac{1}{9}b^2x^2+\frac{1}{6}b^2xy-\frac{1}{4}b^2y^2$

15. Verwandle, wenn möglich, in ein Produkt.
a) $a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2$ **b)** $36p^2+21pq+64q^2$
c) $-a^2-2ab-b^2+1$ **d)** $a^2-2ab+b^2-1$
e) u^2+uv+v^2 **f)** a^4+b^4
g) $4a^2-5b^2$ **h)** $a^2+2ab+b^2+1$

16. a) Beweise Satz 203.1.
b) a^3-8b^3 **c)** $243+216a^6$ **d)** $\frac{64}{125}x^3-1$
e) $\frac{243}{512}a^3+2\frac{10}{27}b^3$ **f)** $0{,}001x^3+y^3z^6$ **g)** $0{,}729u^3-1\,000\,000v^3$

7.5.4 Faktorisieren durch Probieren

Wenn du a^2+5a+6 in ein Produkt verwandeln sollst, so erscheint dir dies sicherlich auf den ersten Blick als aussichtslos. Erstaunlicherweise kommt man hier aber mit einigen kleinen Überlegungen und einem geschickten Probieren zum Ziel.
Da das Aggregat mit a^2 beginnt und aus 3 Gliedern besteht, versuchen wir den Ansatz

$$a^2+5a+6=(a\,\square\,?)(a\,\triangle\,?).$$

Die Symbole $\square$ und $\triangle$ stehen dabei für $+$ oder $-$.
Die für die Fragezeichen zu wählenden Zahlen müssen, miteinander multipliziert, 6 ergeben. 6 läßt sich mit natürlichen Zahlen als $2\cdot3$, aber auch als $1\cdot6$ schreiben. Wir versuchen es mit $2\cdot3$ und setzen also an

$$a^2+5a+6=(a\,\square\,2)(a\,\triangle\,3).$$

Von den 4 möglichen Kombinationen $++$, $+-$, $-+$ und $--$ scheiden die beiden mittleren aus, da wir sonst -6 für das letzte Glied erhielten. Die Kombination + + führt zum richtigen mittleren Glied $5a$. Also gilt die Faktorisierung

$$a^2 + 5a + 6 = (a+2)(a+3).$$

Hätten wir 6 als $1 \cdot 6$ zerlegt, so ergäbe $(a \square 1)(a \triangle 6)$ für keine der 4 Rechenzeichenkombinationen das mittlere Glied $5a$. Man muß also ein Gespür dafür haben! Bei $a^2 + 5a - 6$ führt nämlich gerade $6 = 1 \cdot 6$ zum Ziel:

$$a^2 + 5a - 6 = (a-1)(a+6).$$

Eine derartige Faktorisierung durch Probieren wird natürlich nicht immer gelingen. Beim Versuch hilft

> **Regel 205.1:** Bei Trinomen der Form $x^2 + bx + c$ mit ganzen Zahlen b und c zerlegt man c in ein Produkt zweier natürlicher Zahlen und versucht, die Rechenzeichenkombination so zu bestimmen, daß sich die richtigen Rechenzeichen und das mittlere Glied ergeben.
> Hat das Trinom die Form $ax^2 + bx + c$, so klammert man erst a aus.

Beispiel: $\frac{3}{4}x^2 - 6x + 9 = \frac{3}{4}(x^2 - 8x + 12) = \frac{3}{4}(x-2)(x-6)$

Aufgaben

1. a) $x^2 + 7x + 12$ b) $x^2 - x - 12$
c) $x^2 + 11x + 10$ d) $x^2 + 9x - 10$

2. a) $u^2 - 13u + 40$ b) $a^2 - 20a + 96$
c) $z^2 - 10z + 9$ d) $x^2 - x - 4$

•3. a) $x^2 - 5xy + 4y^2$ b) $y^2 + yz - 56z^2$
c) $a^2 - 9ab + 18b^2$ d) $u^2 - 4uv - 21v^2$

•4. a) $x^2 + 2x - 48$ b) $x^2 - 2x - 48$
c) $x^2 - 2x + 48$ d) $x^2 + 2x + 48$

5. a) $2x^2 + 16x + 30$ b) $7x^2 - 14x - 105$
c) $\frac{3}{4}x^2 + 6x + 9$ d) $-x^2 + 12x - 35$

•6. a) $3x^2 - 39x + 108$ b) $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9$
c) $-\frac{1}{2}x^2 + 9x - 18$ d) $0{,}1a^2 - 1{,}1a + 1$

•7. a) $-0{,}4z^2 + 2{,}8z - 4{,}8$ b) $\frac{1}{4}p^2 - pq - \frac{21}{4}q^2$
c) $\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{3}x + 8$ d) $\frac{5}{4}y^2 + 25y + 120$