UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

# Anschauliche Geometrie

**Barth, Friedrich**

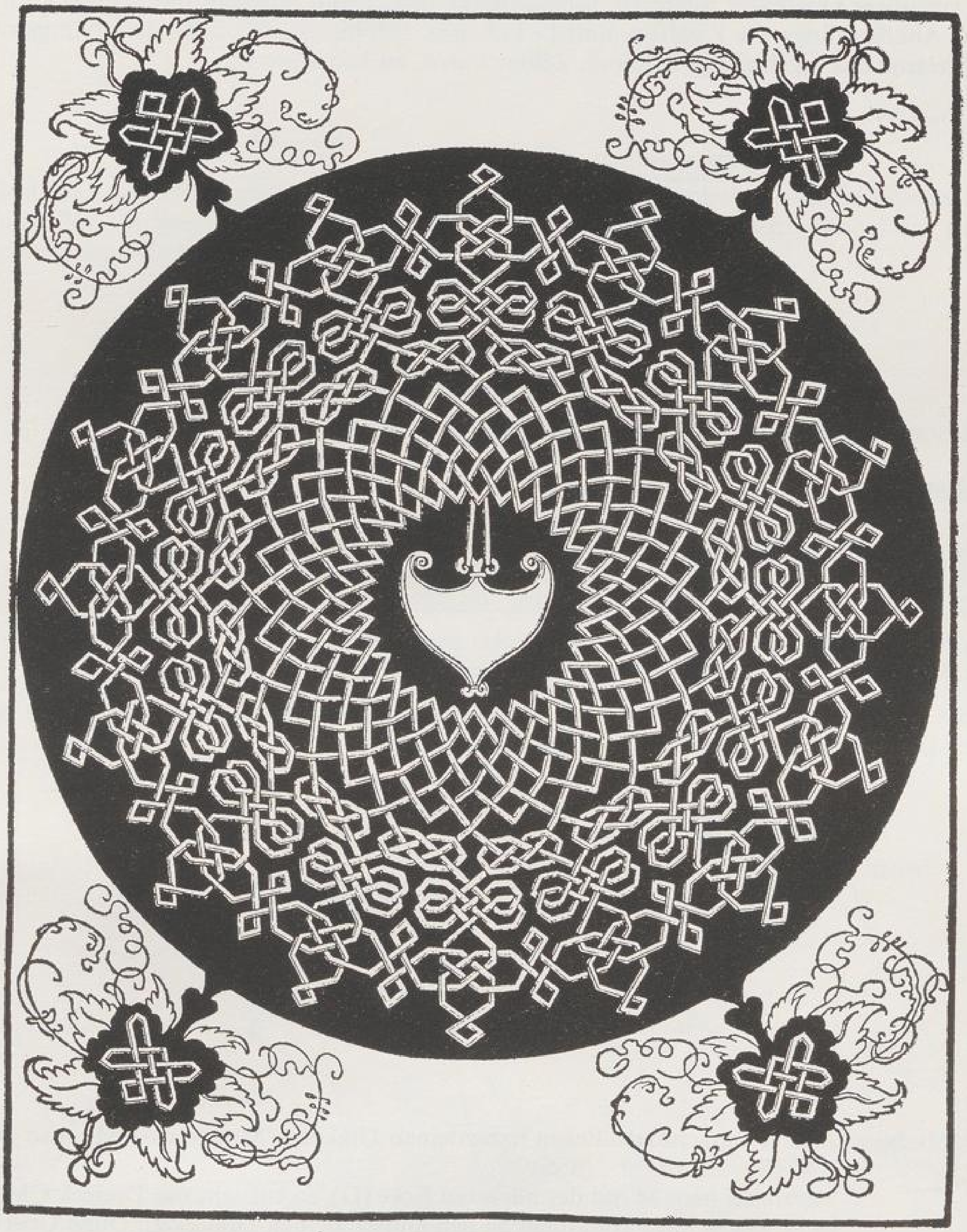
**München, 1997**

1. Kapitel Regelmäßige Vielecke

urn:nbn:de:hbz:466:1-83463

Visual Library

# 1. Kapitel
# Regelmäßige Vielecke

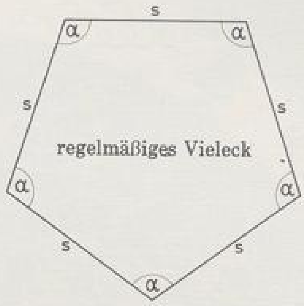


DÜRER: Knoten mit herzförmigem Schild. Holzschnitt 1507

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

## 1.1 Grundlagen

Wegen ihres ästhetischen Reizes haben die einfach konstruierbaren regelmäßigen Vielecke schon immer als Zierfiguren in Ornamenten gedient. Die ältesten Darstellungen verwendeten vor allem Quadrate, Achtecke, Sechzehnecke usw. Dann tauchten das Sechseck und seine Abkömmlinge wie Zwölfeck und 24-Eck usw. auf, bis es schließlich den Pythagoräern gelang, das regelmäßige Fünfeck, Zehneck usw. zu konstruieren.

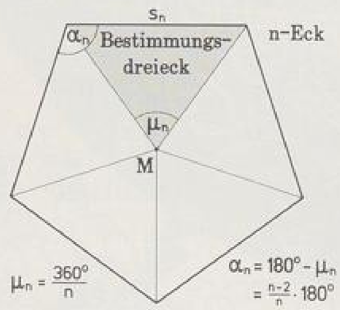

Mathematisch beschreiben wir ein regelmäßiges n-Eck mit der

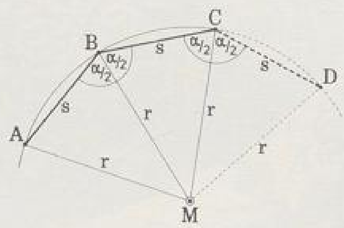
**Definition**

> Ein n-Eck heißt **regelmäßig,**
> **wenn alle Seiten gleich lang und alle Winkel gleich groß sind.**

Ab n = 4 genügt eine Bedingung allein nicht: Eine Raute muss nicht lauter gleich große Winkel haben, und ein Rechteck muss nicht lauter gleich lange Seiten haben.

Jedes regelmäßige n-Eck besteht aus n kongruenten gleichschenkligen Dreiecken. Ein solches Dreieck nennen wir **Bestimmungsdreieck.**



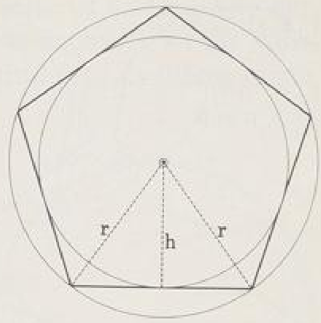




*Begründung:* Je drei benachbarte Ecken haben einen Umkreis (Mittelpunkt M), also gilt $\Delta AMB \cong \Delta BMC$ (SSS)
Verbindet man M mit der nächsten Ecke (D), so entsteht das Dreieck CMD, es ist wegen SWS kongruent zu den andern beiden Dreiecken. Diese Überlegung lässt sich auf die andern Ecken fortsetzen.



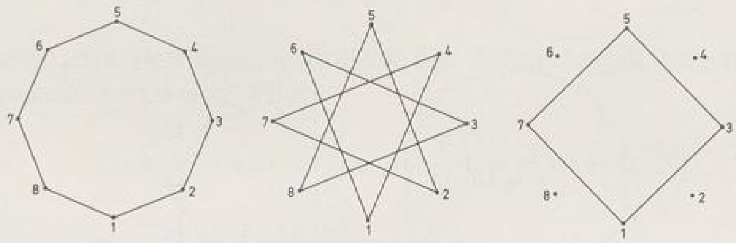
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Damit ist auch gezeigt, dass jedes regelmäßige Vieleck einen Umkreis und einen Inkreis hat (Inkreisradius = Höhe auf der Basis des Bestimmungsdreiecks). Wegen der kongruenten Bestimmungsdreiecke gilt

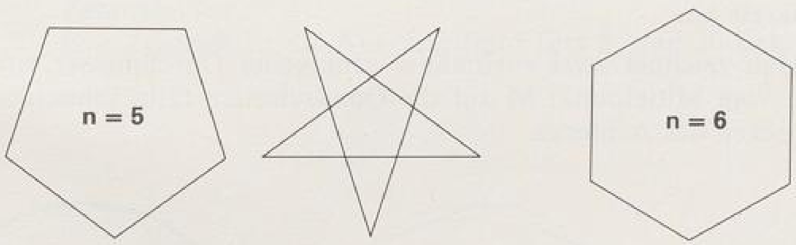



$$\mu_n = \frac{360°}{n}, \quad \alpha_n = 180° - \mu_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°$$

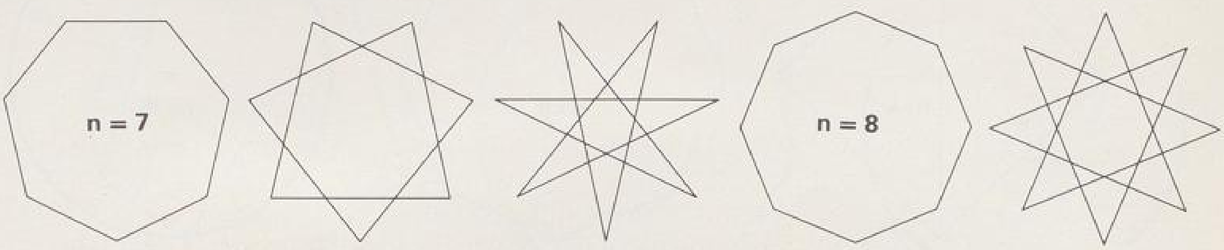
Lässt man auch überschlagene n-Ecke zu, dann entstehen regelmäßige **Sternvielecke.** Sie sind schon von Thomas BRADWARDINE (1290 bis 1349), dem späteren Erzbischof von Canterbury, untersucht worden.




Es gibt zum Beispiel zwei verschiedene regelmäßige Achtecke. Beim üblichen Achteck verbindet man jede Ecke mit der nächsten, beim Sternachteck mit der überübernächsten Ecke. Verbindet man dagegen jede Ecke mit der übernächsten Ecke, so ergibt sich ein Quadrat.
Allgemein gilt: Ein n-Eck ergibt sich genau dann, wenn man jede Ecke mit der k-ten darauf folgenden Ecke verbindet und n und k teilerfremd sind. Die Verbindung der Ecken n und k liefert dasselbe n-Eck wie die Verbindung der Ecken n und n − k.

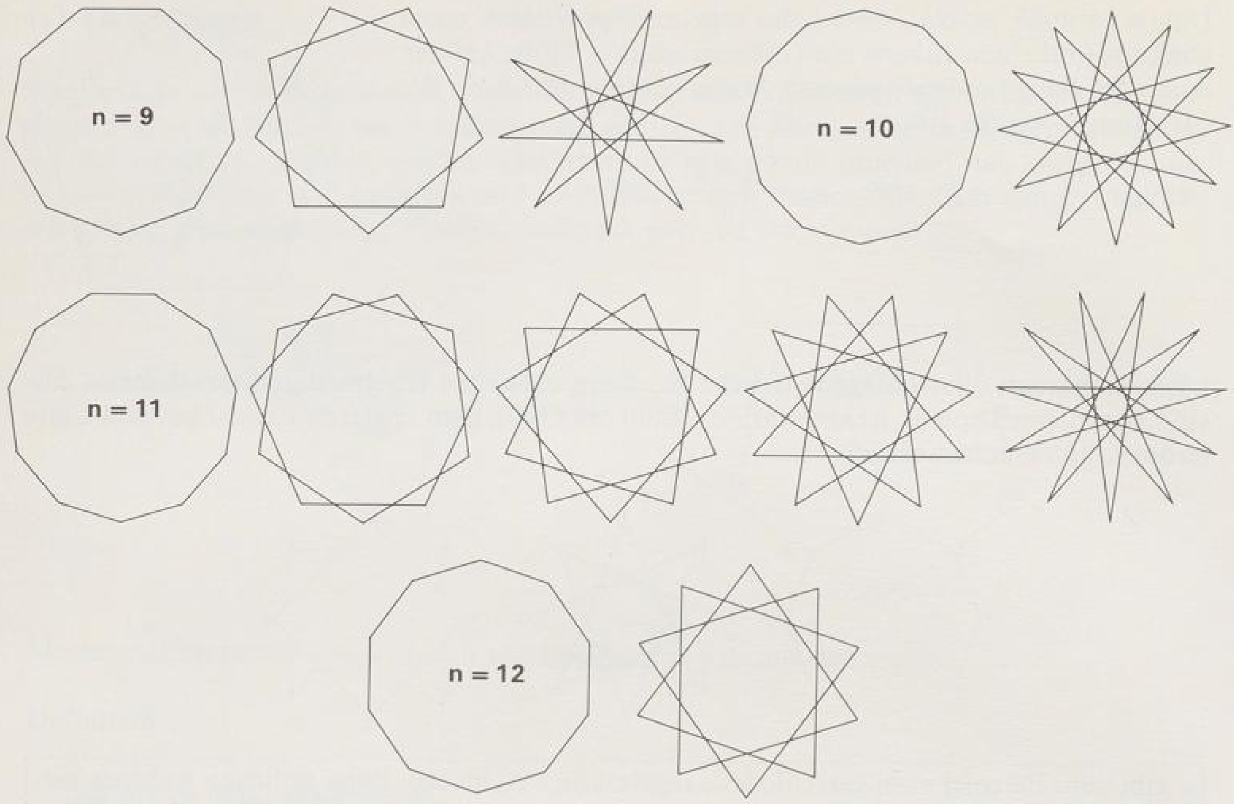



Kein Stern!






UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

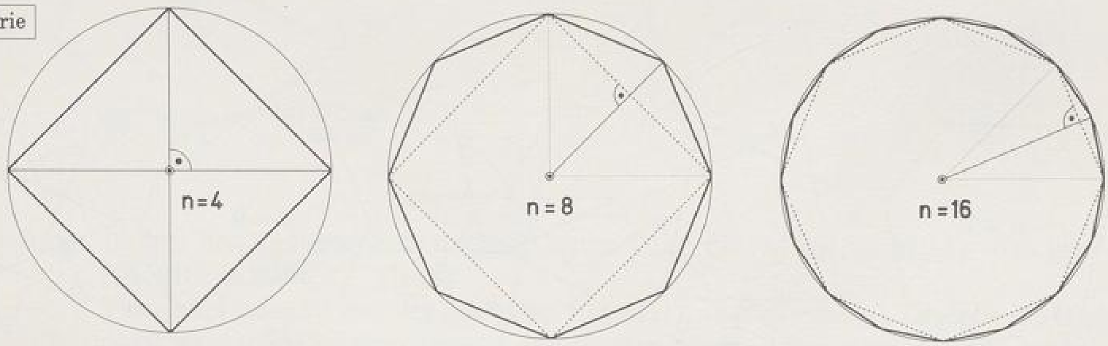



# *1.2 Konstruktionen

Ein regelmäßiges Vieleck ist genau dann konstruierbar, wenn der Mittelpunktswinkel $\mu_n$ konstruierbar ist. Kann man ein n-Eck konstruieren, dann klappt es auch bei einem mit der doppelten Eckenzahl (Winkel lassen sich ja verdoppeln und halbieren). Am besten fängt man mit dem Umkreis an.

**Quadrat** (4er Serie): Man zeichnet zwei zueinander senkrechte Durchmesser ein. Die Lote, die man vom Mittelpunkt M auf die Quadratseiten fällt, schneiden den Kreis in den Ecken des Achtecks.

4er-Serie

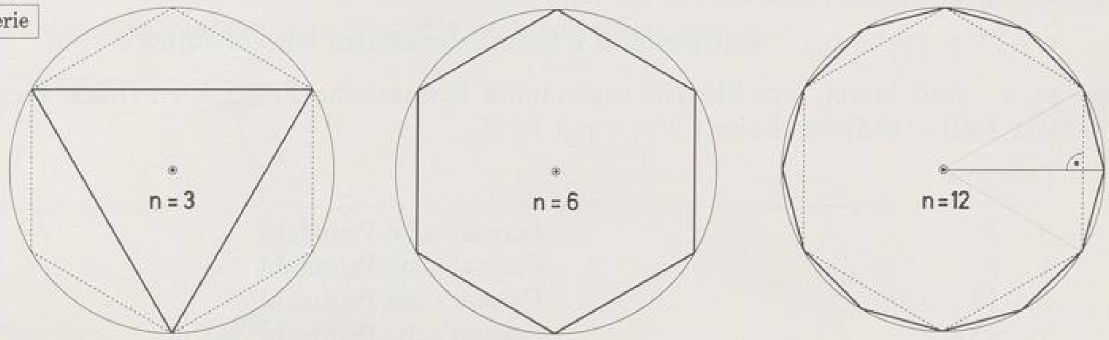





UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

**Sechseck** (3er Serie): Die Konstruktion ist noch einfacher. Eine Seite ist so lang wie der Radius, weil das Bestimmungsdreieck gleichseitig ist. Das Sechseck ist die Ausgangsfigur fürs Dreieck (übernächste Ecken verbinden) und fürs Zwölfeck (Lote fällen).

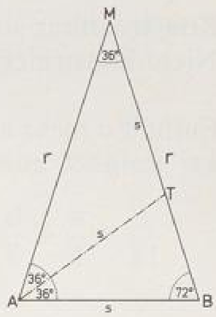
3er-Serie



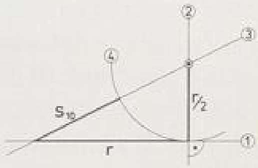

**Zehneck** (5er Serie): Im Bestimmungsdreieck des Zehnecks gilt wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke MAB und ABT

$$\frac{r}{s} = \frac{s}{r-s}, \quad \text{also} \quad r^2 - rs = s^2, \quad r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = s^2 + rs + \left(\frac{r}{2}\right)^2,$$

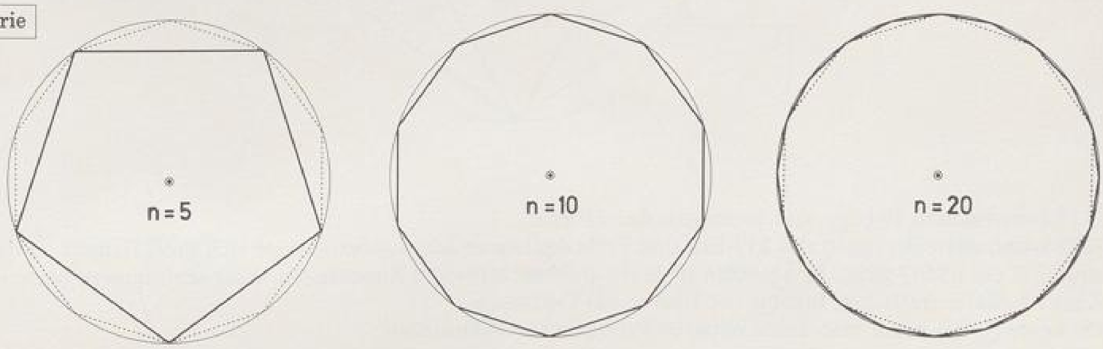
$$\text{also} \quad r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \left(s + \frac{r}{2}\right)^2$$




Nach Pythagoras lassen sich r, $\frac{r}{2}$ und $s + \frac{r}{2}$ deuten als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks. Ist der Umkreisradius r bekannt, so findet man die Seite s des Zehnecks so:
Das Zehneck ist die Ausgangsfigur fürs 5- und 20-Eck.




5er-Serie






UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lange Zeit hat man geglaubt, dass nur Vieleckserien mit $n = 4 \cdot 2^k$, $n = 3 \cdot 2^k$ und $n = 5 \cdot 2^k$ konstruierbar seien, bis schließlich der deutsche Mathematiker Carl Friedrich GAUSS (Braunschweig 30.4.1777 bis 23.2.1855 Göttingen) im Jahr 1801 in seinen »Disquisitiones arithmeticae« bewies, dass auch noch andere regelmäßige n-Ecke konstruierbar sind. Für die Eckenzahl n muss gelten

$$n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots p_m, \quad \text{wobei m und k natürliche Zahlen einschließlich 0 sind}$$

$p_1, p_2, \ldots$ sind lauter verschiedene sogenannte Fermat'sche Primzahlen (nach Pierre de FERMAT 1601–1665) der Bauart $2^{2^i} + 1$ mit $i \in \mathbb{N}_0$

| i | $2^{2^i} + 1$ | |
|---|---|---|
| 0 | 3 | Fermat'sche Primzahl |
| 1 | 5 | Fermat'sche Primzahl |
| 2 | 17 | Fermat'sche Primzahl |
| 3 | 257 | Fermat'sche Primzahl |
| 4 | 65 537 | Fermat'sche Primzahl |
| 5 | $4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$ | keine Primzahl |

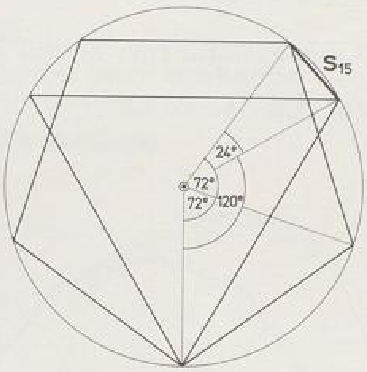
Konstruierbar sind demnach die n-Ecke mit n = 3, 4, 5, 6, 8, 10 12, 15, 16, 17, 20, …
Nicht konstruierbar sind die n-Ecke mit n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, …

Enthält n mehr als eine Fermat'sche Primzahl, dann kombiniert man die Mittelpunktswinkel geeignet, zum Beispiel mit n = 15

$$\frac{1}{15} = \frac{a}{5} + \frac{b}{3}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{15} = \frac{3a + 5b}{15} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 3a + 5b$$

$$\text{wir wählen } a = 2 \text{ und } b = -1$$

$$\frac{1}{15} = \frac{2}{5} + \frac{-1}{3} \quad \| \cdot 360°, \quad \text{also} \quad 24° = 2 \cdot 72° - 120°$$



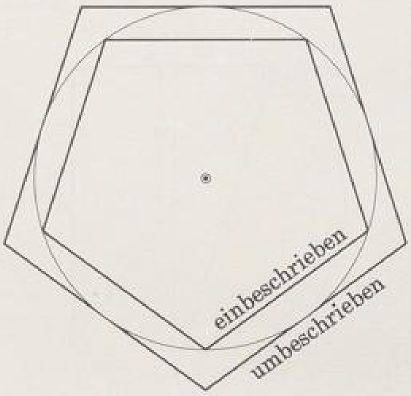

1825 konstruierten PAUKER und ERDINGER das 17-Eck.
1832 konstruierte RICHELOT das 257-Eck und Ende des letzten Jahrhunderts wagte sich Prof. HERMES an die Konstruktion des 65 537-Ecks. Er brauchte 10 Jahre und beschrieb 250 Riesenseiten, diese schlummern heute in einer Kiste im Mathematischen Institut der Universität Göttingen.
Bis heute (1995) kennt man keine weiteren Fermat'schen Primzahlen.

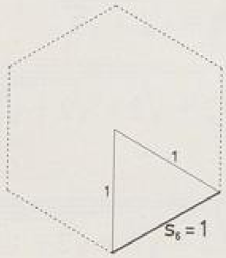


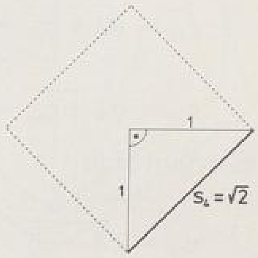
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

## *1.3 Berechnungen

Mit dem Satz von PYTHAGORAS können wir die Seiten der konstruierbaren regelmäßigen n-Ecke auch berechnen. Weil je zwei regelmäßige n-Ecke mit gleicher Eckenzahl ähnlich sind, brauchen wir die folgenden Rechnungen bloß am Einheitskreis durchzuführen. Das n-Eck kann dem Einheitskreis ein- oder umbeschrieben sein.




**Einbeschriebene n-Ecke**

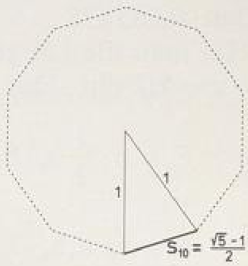
Die Seiten der drei Ausgangsfiguren sind schnell gefunden

**Sechseck** $\mathbf{s_6 = 1}$

**Viereck** $\mathbf{s_4 = \sqrt{2}}$

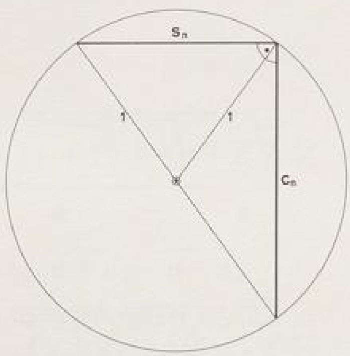
**Zehneck** nach Seite 8 gilt $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(s_{10} + \frac{1}{2}\right)^2$

also $\mathbf{s_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$




Hat man ein n-Eck, dann ist das 2n-Eck leicht konstruierbar. Entsprechend einfach lässt sich die Seite eines 2n-Ecks aus der eines n-Ecks berechnen. Dazu verwenden wir das Verfahren von Ludolph von CEULEN (Hildesheim 18. 1. 1540 bis 31. 12. 1610 Leiden). Seine Idee war es, das der Seite $s_n$ zugehörige Komplement $c_n$ einzuführen. $c_n$ ist die zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit $s_n$ als einer Kathete und der Hypothenuse 2. Es gilt

$$s_n^2 + c_n^2 = 4\,, \quad \text{also} \quad \mathbf{s_n = \sqrt{4 - c_n^2}}\,.$$






UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Nach dem Kathetensatz ist $c_{2n}^2 = 2\left(1 + \frac{c_n}{2}\right)$, es gilt somit die Verdopplungsformel $\mathbf{c_{2n} = \sqrt{2 + c_n}}$ .

Als Beispiel berechnen wir die Seite des regelmäßigen 96-Ecks. Wegen $96 = 2^4 \cdot 6$ ist die Ausgangsfigur das Sechseck, wir starten also mit $s_6 = 1$

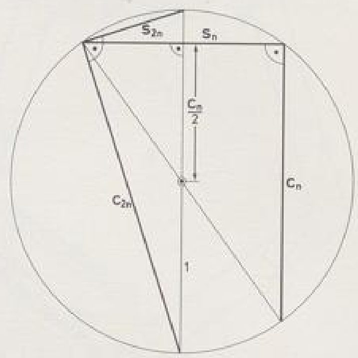
$$c_6 = \sqrt{4 - 1^2} = \sqrt{3}\,, \quad \text{wir wenden die Verdopplungsformel viermal an}$$

$$c_{12} = \sqrt{2 + c_6} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$c_{24} = \sqrt{2 + c_{12}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$c_{48} = \sqrt{2 + c_{24}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

$$c_{96} = \sqrt{2 + c_{48}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$




es ergibt sich

$$c_{96} = \sqrt{4 - c_{96}^2} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} = 0{,}065\,438\,165\,622\ldots$$

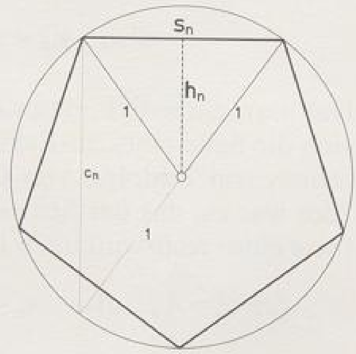
Hat ein Kreis den Radius r, dann muss man noch mit r multiplizieren. In einem Kreis von 3 m Radius ist die Seite eines einbeschriebenen regelmäßigen 96-Ecks $3\,\text{m} \cdot 0{,}065\,438\ldots \approx 196{,}3$ mm lang.

Hat man die Länge $s_n$ einer Vieleckseite, dann findet man auch schnell den Inhalt $F_n$ der Vieleckfläche. Das n-Eck besteht aus n Bestimmungsdreiecken, also ist

$$F_n = n \cdot \frac{1}{2} s_n \cdot h_n \qquad \text{Umfang } u_n = n \cdot s_n$$

$$\mathbf{F_n = \frac{1}{2} u_n h_n} \qquad h_n = \frac{1}{2} c_n = \frac{1}{2}\sqrt{4 - s_n^2}$$

zum Beispiel $F_{96} = \frac{1}{2} u_{96} h_{96} = \frac{1}{2} \cdot 96 s_{96} \cdot \frac{1}{2} c_{96} = 24 s_{96} \cdot c_{96}$




$$= 24 \sqrt{\underbrace{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}_{\mathbf{a} \;-\; \mathbf{b}}} \; \sqrt{\underbrace{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}_{\mathbf{a} \;+\; \mathbf{b}}}$$

$$\sqrt{a - b} \cdot \sqrt{a + b} = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$F_{96} = 24 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} = 3{,}139\,350\,20\ldots$$



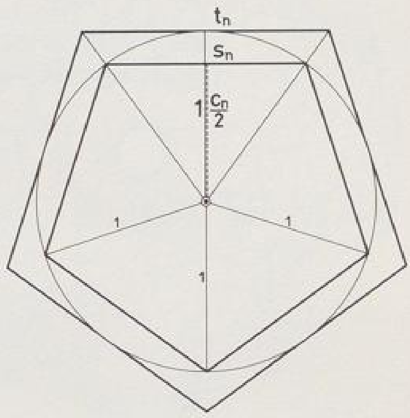
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Hat ein Kreis den Radius r, dann muss man noch mit $r^2$ multiplizieren. In einem Kreis von 3 m Radius ist die Fläche des einbeschriebenen regelmäßigen 96-Ecks $9\,\text{m}^2 \cdot 3{,}139\,350\ldots \approx 28{,}25\,\text{m}^2$ groß.

**Umbeschriebene n-Ecke**

Wegen der Ähnlichkeitssätze gilt für die Seite $t_n$ des umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks

$$t_n : s_n = 1 : \frac{c_n}{2}, \quad \text{also} \quad \mathbf{t_n = 2\,\frac{s_n}{c_n}}$$




$$\text{zum Beispiel} \quad t_{96} = 2\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}} \approx 0{,}065\,473\ldots$$

Bei einem Kreis von 3 m Radius ist die Seite des regelmäßigen umbeschriebenen 96-Ecks $3\,\text{m} \cdot 0{,}065\,473\ldots \approx 196{,}4\,\text{mm}$ lang.
Für die Fläche $G_n$ des umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks gilt

$$G_n = n \cdot \frac{1}{2}\,t_n \cdot 1 \qquad \text{Umfang } v_n = n \cdot t_n$$

$$\mathbf{G_n = \frac{1}{2}\,v_n}$$

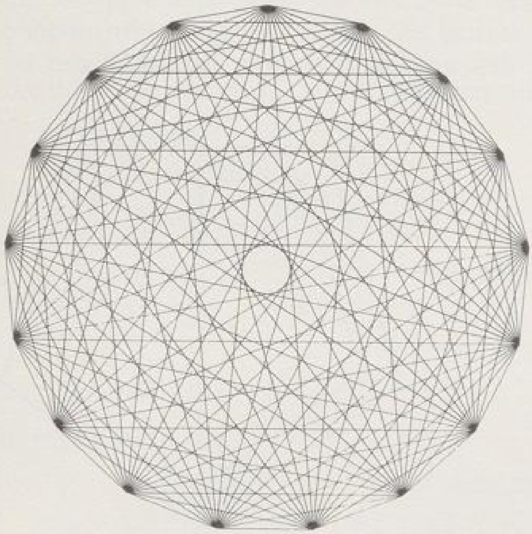
zum Beispiel $G_{96} = 3{,}142\,714\ldots$. Bei einem Kreis von 3 m Radius ist die Fläche des umbeschriebenen regelmäßigen 96-Ecks $9\,\text{m}^2 \cdot 3{,}142\,714\ldots \approx 28{,}28\,\text{m}^2$ groß.

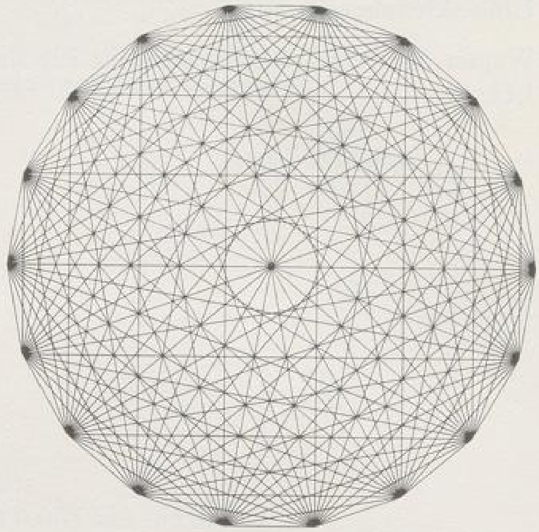


UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

**Aufgaben zu 1.1**

*Falls nicht anders vermerkt, ist mit Vieleck (n-Eck) immer ein regelmäßiges Vieleck (n-Eck) gemeint.*





1. Welche Vielecke haben keine parallelen Seiten?
2. Bei welchen Vielecken schneiden sich Diagonalen im Mittelpunkt des Vielecks? Wie viele Diagonalen schneiden sich dann?
3. **a)** Wie groß ist die Summe der Innenwinkel in einem Zwölfeck?
   **b)** Welches n-Eck hat die Winkelsumme 17640°?
   Wie groß ist ein Innenwinkel?
4. Wie groß ist jeweils ein Innenwinkel im n-Eck?
   **a)** n = 3 **b)** n = 4 **c)** n = 5 **d)** n = 15 **e)** n = 17
   **f)** n = 51 **g)** n = 85 **h)** n = 255 **i)** n = 257
5. Zeichne ein Fünfeck, das nicht regelmäßig ist:
   **a)** mit lauter gleich langen Seiten
   **b)** mit lauter gleich großen Winkeln.
6. Wie groß ist im n-Eck
   **a)** ein Innenwinkel
   **b)** die Innenwinkelsumme
   **c)** die Außenwinkelsumme
   **d)** ein Basiswinkel im Bestimmungsdreieck
   **e)** der Winkel an der Spitze des Bestimmungsdreiecks (Zentriwinkel)?

• 7. **a)** Wie viele Diagonalen hat ein n-Eck?
   **b)** In wie viele Dreiecke wird ein n-Eck durch die Diagonalen von einer Ecke aus zerlegt?

8. **a)** Wie viele Symmetrieachsen hat ein n-Eck? Beschreibe die Lage der Achsen.
   **b)** Welche n-Ecke sind punktsymmetrisch?



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

9. Welche Sätze sind falsch? (Gegenbeispiel!)
   **a)** Für einen Innenwinkel $\alpha$ im Vieleck gilt: $60° \leqq \alpha \leqq 120°$.
   **b)** Ein Vieleck ist genau dann regelmäßig, wenn es einen Umkreis und lauter gleich lange Seiten hat.
   **c)** Ein Vieleck ist genau dann regelmäßig, wenn es einen Inkreis und lauter gleich lange Seiten hat.
   **d)** Ein Vieleck ist genau dann regelmäßig, wenn es einen Umkreis und lauter gleich große Winkel hat.
   **e)** Ein n-Eck und ein k-Eck sind genau dann ähnlich, wenn $n = k$ ist.
   **f)** Zwei Vielecke sind kongruent, wenn sie denselben Umkreis haben.

• **10.** Wie viele Sternvielecke gibt es mit
   **a)** 15 **b)** 16 **c)** 17 **d)** 18 **e)** 100 Ecken?

⁝ **11.** Zeige: Ist p eine Primzahl, dann gibt es in einem Kreis $(p-1)/2$ regelmäßige p-Ecke.

**12.** **a)** In welchem n-Eck gibt es 1175 Diagonalen?
   **b)** In welchem n-Eck ist ein Innenwinkel $\alpha_n = 178{,}2°$?

**Aufgaben zu 1.2**

*Falls nicht anders vermerkt, ist mit Vieleck (n-Eck) immer ein regelmäßiges Vieleck (n-Eck) gemeint.*

**1.** Konstruiere in einen Kreis mit $r = 8$ ein
   **a)** Dreieck und Zwölfeck **b)** Achteck
   **c)** Zehneck und Fünfeck **d)** Fünfzehneck.

• **2.** Begründe, warum das n-Eck konstruierbar ist:
   **a)** $n = 192$ **b)** $n = 512$ **e)** $n = 8\,589\,934\,594$
   **c)** $n = 920$ **d)** $n = 17\,408$

• **3.** Das 51-Eck lässt sich über das 17-Eck und das gleichseitige Dreieck konstruieren, das 85-Eck über das 17-Eck und Fünfeck. Gib jeweils die Gleichung für die Konstruktion des Mittelpunktswinkels an. (Keine Konstruktion!)

**4.** Bei der Konstruktion von Vielecken gibt es zwei Aufgabentypen:
   I Der Umkreisradius ist gegeben,
   II die Seitenlänge s ist gegeben.
   **a)** Warum und wie kann man Aufgaben vom Typ II mit Hilfe von Typ I lösen?
   **b)** Konstruiere nach **a)** ein Fünfeck mit $s = 6$.

**5.** **a)** Konstruiere ein Achteck mit $s = 5$.
   **b)** Konstruiere ein Zwölfeck mit $s = 3$.



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

**• 6.** »Konstruktion« des Siebenecks mit dem Einschiebelineal (nach BREIDENBACH)
Ein Einschiebelineal ist ein Lineal, auf dem man zwei Punkte markiert. Man legt das Lineal so durch einen gegebenen Punkt, dass die beiden markierten Punkte auf gegebenen Linien liegen (einschieben).
Das Siebeneck ist einem Kreis k um O mit Radius 4 einbeschrieben.
- Zeichne $H(-4|6)$ und OH.
- Markiere auf einem Lineal R und S so, dass $\overline{RS} = 6$ ist.
  Einschiebung: Lege das Lineal so durch $L(-4|2)$, dass R auf HO und S auf der positiven x-Achse zu liegen kommen.
- Die Mittelsenkrechte von [OS] schneidet den Kreis in P (über der x-Achse). P und $Q(4|0)$ bilden eine Seite des Siebenecks.
  Konstruiere nach diesem Verfahren ein Siebeneck.

**• 7.** »Konstruktion« des Neunecks mit dem Einschiebelineal (nach BREIDENBACH)
Das Neuneck ist einem Kreis k um O mit Radius 4 einbeschrieben.
- Zeichne den Kreispunkt $H(2|y>0)$.
- Einschiebung: Passe die Strecke [RS] der Länge 8 so ein, dass R auf der y-Achse, S auf der x-Achse und H auf RS zu liegen kommen.
- Die Mittelsenkrechte von [OS] schneidet den Kreis in P (über der x-Achse). P und $Q(4|0)$ bilden eine Seite des Neunecks. Konstruiere nach diesem Verfahren ein Neuneck.

**Aufgaben zu 1.3**

*Falls nicht anders vermerkt, ist mit Vieleck (n-Eck) immer ein regelmäßiges Vieleck (n-Eck) gemeint.*

**1.** Im Kreis mit Radius r gilt für das einbeschriebene Sechseck $s_6 = r$.
Berechne für diesen Kreis $c_6$, $c_3$ und $s_3$.

**2.** Kreise um Quadratecken durch den Quadratmittelpunkt schneiden die Quadratseiten. Zeige: Die Schnittpunkte bilden ein Achteck.

**3.** Nach C. F. GAUSS gilt für die Seite des 17-Ecks im Einheitskreis

$$s_{17} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(17-\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)-\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}$$

Ermittle mit dem Taschenrechner einen Näherungswert für $s_{17}$ im Umkreis mit $r = 9$ und zeichne damit das 17-Eck.

**4. a)** Wie lang ist die Seite $s_4$ des Vierecks mit dem Umkreisradius 1?
**b** Berechne die Seite $s_{128}$ des 128-Ecks, das dem Einheitskreis einbeschrieben ist.



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

⁝5. Verbindet man in einem n-Eck jeweils zwei Ecken so, dass die Verbindungsstrecke parallel ist zu einer Seite, so rahmen die Verbindungsstrecken ein kleines n-Eck ein. Berechne für $n = 5$, $n = 6$ und $n = 8$

**a)** aus der Seitenlänge s des n-Ecks die Seitenlänge a des kleineren n-Ecks.
**b)** das Verhältnis der Flächeninhalte (groß : klein).

• **6.** Setze auf die Seiten der Länge s eines n-Ecks kongruente Rechtecke mit den Seitenlängen s und x. Die äußern Ecken der Rechtecke bilden ein 2n-Eck. Berechne das Seitenverhältnis $s : x$ der Rechtecke und das Flächenverhältnis $F_{2n} : F_n$ der Vielecke für

**a)** $n = 3$ **b)** $n = 4$ **c)** $n = 5$ **d)** $n = 6$.

• **7.** Zeichne in den Einheitskreis ein Dreieck:
Die eine Seite ist so lang wie die eines Quadrats mit Umkreisradius 1, die andre Seite ist so lang wie die eines gleichseitigen Dreiecks mit Umkreisradius 1.
Bestimme die Dreieckswinkel und die Länge der dritten Seite.

• **8.** Zeichne in den Einheitskreis ein Trapez:
Die eine Basis ist so lang wie die Seite eines gleichseitigen Dreiecks mit Umkreisradius 1,
die andre Basis ist so lang wie die Seite eines Sechsecks mit Umkreisradius 1,
der Kreismittelpunkt liegt im Trapez.

**a)** Zeige: Die Schenkel sind so lang wie die Seiten eines Quadrats mit Umkreisradius 1.
**b)** Zeige: Die Diagonalen schneiden sich rechtwinklig.
**c)** Zeige: Der Diagonalenschnittpunkt S hat von einer Basis den Abstand 0,5.
**d)** Berechne Winkel und Flächeninhalt des Trapezes.

**9.** Für die Seitenlänge des Zehnecks mit Umkreisradius 1 gilt $s_{10} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$

**a)** Berechne daraus die Seitenlänge des zugehörigen Fünfecks.
**b)** Wie lang ist $s_{80}$ im Einheitskreis?
**c)** Wie lang ist der Inkreisradius des 80-Ecks, das dem Einheitskreis einbeschrieben ist?
**d)** Wie lang ist $s_{80}$ im Kreis mit Radius r?

**10.** Zeichne einen Kreis mit Radius 5 und konstruiere ein fast regelmäßiges Siebeneck mit der Näherung von

**a)** HERON: $s_7 \approx \frac{1}{2} s_3$ **b)** ESTREMOW: $s_7 \approx s_{10} + \frac{1}{4} r$.

**11.** Dem Einheitskreis ist ein 3-, 6- und 12-Eck ein- bzw. umbeschrieben.

**a)** Berechne Umfang $u_n$ und Flächeninhalt $F_n$ des einbeschriebenen n-Ecks.
**b)** Berechne Umfang $v_n$ und Flächeninhalt $G_n$ des umbeschriebenen n-Ecks.

**12.** Berechne Umfang und Flächeninhalt eines 16-Ecks, das einem Kreis mit Radius r ein- bzw. umbeschrieben ist.

⁝ **13.** Berechne die Seite des 15-Ecks im Einheitskreis.



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

**14.** NAHDRAN

Für alle n-Ecke mit $n \geqq 5$ gibt es bei gegebenem Umkreis folgende Näherungskonstruktion:

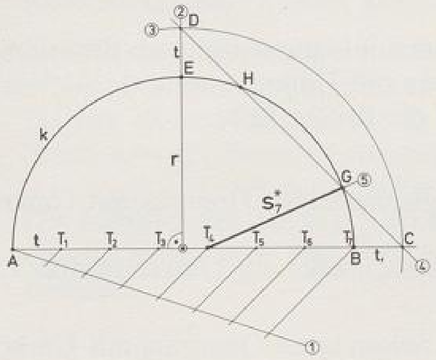
① Ein Durchmesser [AB] des Umkreises k (Mittelpunkt M, Radius r) wird in n gleiche Teile t zerlegt (Teilpunkte: $A = T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}, T_n = B$).

② Das Lot auf AB in M schneidet k in E und F.

③ Der Kreis um M mit Radius $r + t$ schneidet [MB in C und [ME in D.

④ CD schneidet k in G und H $(\overline{CG} < \overline{CH})$.

⑤ $\overline{GT_{n-3}}$ ist näherungsweise die gesuchte n-Eckseite.





Konstruiere mit diesem Verfahren

**a)** ein Neuneck mit $r = 9$

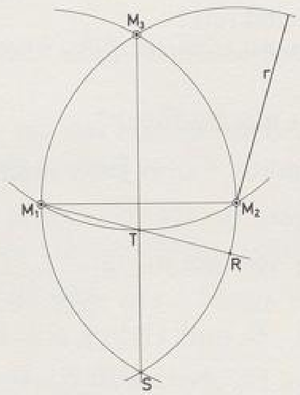
**b)** ein Fünfeck mit $r = 5$ und vergleiche rechnerisch den exakten Wert von $s_5$ mit dem Näherungswert $s_5^*$.

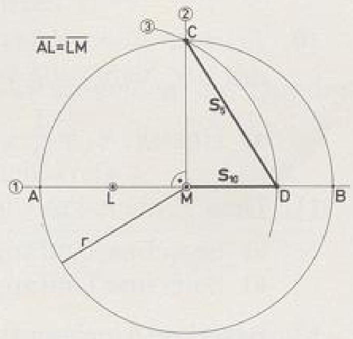
**15.** Konstruiere die Figur für $r = 4$ und begründe, dass für die n-Ecke mit Umkreisradius r gilt:

**a)** $\overline{SM_3} = s_3$ **b)** $\overline{SM_2} = s_6$

**c)** $\overline{SR} = s_8$ **d)** $\overline{M_1T} = s_{12}$

**e)** $\overline{M_2R} = s_{24}$




• **16. a)** Konstruiere die Figur für $r = 4$.

**b)** Zeige: [MD] ist genau so lang wie die Seite $s_{10}$ des einbeschriebenen Zehnecks, [CD] ist genau so lang wie die Seite $s_5$ des einbeschriebenen Fünfecks.

**c)** Zeige: $s_5^2 = s_6^2 + s_{10}^2$.



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

**17.** Dem Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a ist ein Halbkreis so umbeschrieben, dass die Ecken A und B auf dem Durchmesser [UV] liegen.

**a)** Zeige: $\overline{UA}$ ist Seitenlänge in einem Zehneck mit Umkreisradius a.

**b)** Zeige: $\overline{UD}$ ist Seitenlänge in einem Fünfeck mit Umkreisradius a.

**18.** Beweise die Formel von J. Gregory (Drumoak 1638 bis 1675 Edinburgh):
$s_{2n}^3 = (2s_{2n} + s_n)s_{4n}^2$ .

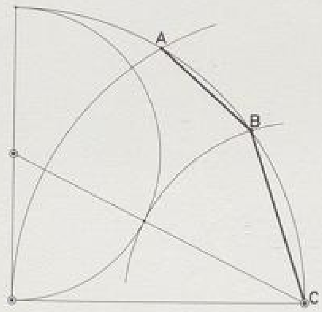
**19.** **a)** Zeige: $u_{2n} = \sqrt{u_n v_{2n}}$ (geometrisches Mittel)
**b)** Zeige: $v_{2n} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ (harmonisches Mittel)

**20.** Die Formeln von J. C. Schwab:
Sind $R_n$ und $r_n$ die Radien von Um- und Inkreis eines n-Ecks und $R_{2n}$ und $r_{2n}$ die entsprechenden Radien beim 2n-Eck mit gleichem Umfang ($u_n = u_{2n}$), so gilt

$$r_{2n} = \frac{1}{2}(r_n + R_n) \qquad R_{2n} = \sqrt{R_n \cdot r_{2n}}$$

Beweise die Formeln von Schwab.

**21.** Zeige: $\overline{AB} = s_{15}$
$\overline{BC} = s_{10}$






UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN