Algebra

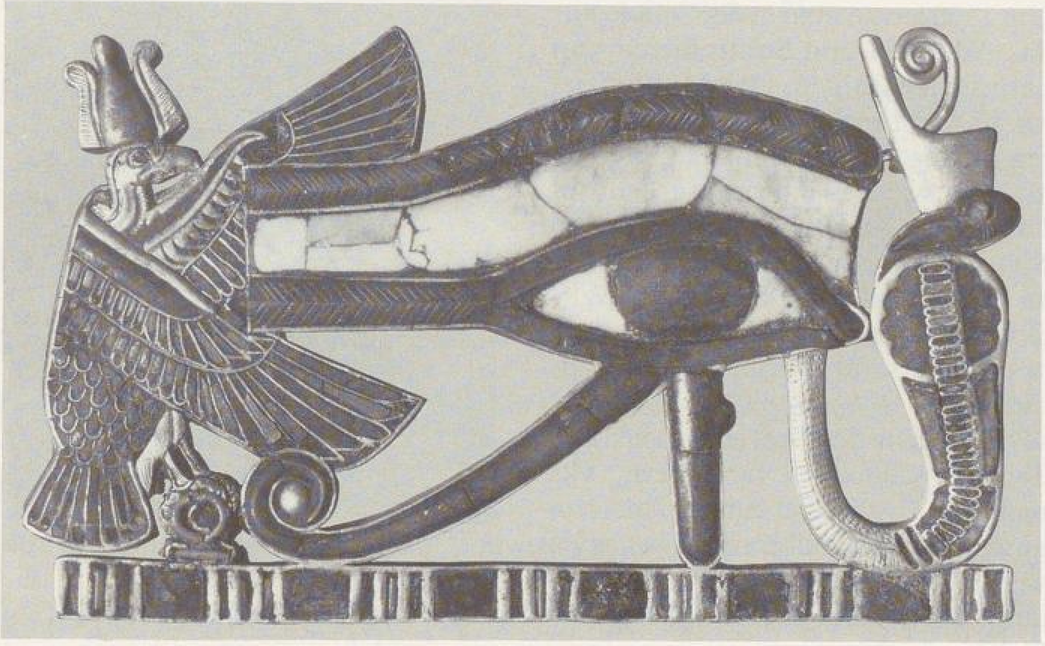
Barth, Friedrich

München, 1999

1 Umformen von Bruchtermen

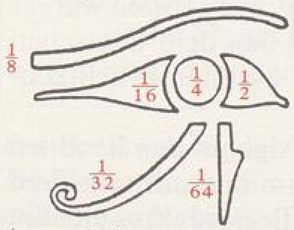
urn:nbn:de:hbz:466:1-83513

1 Umformen von Bruchtermen



Das Horusauge aus dem Bruststück einer Kette des Pharaos TUTANCHAMUN (1347 bis 1338 v. Chr.), flankiert links von der mit dem Geierbalg gekrönten Geiergöttin Nechbet von Elkab, der Göttin Oberägyptens, rechts von der Schlangengöttin Uto mit der unterägyptischen Krone. – Höhe 5,7 cm, Breite 9,5 cm.

Bereits auf einem Papyrus der 6. Dynastie (2290–2155 v. Chr.) finden sich besondere Zeichen für gewisse Stammbrüche, nämlich für $\frac{1}{2}$, für $\frac{1}{4}$, für $\frac{1}{8}$, für $\frac{1}{16}$, für $\frac{1}{32}$ und für $\frac{1}{64}$, die in den jüngeren Papyri wie dem *Papyrus Rhind* (um 1550 v. Chr.) nur mehr für die entsprechenden Teile des Getreidehohlmaßes *hekat* (= 4,875 l) verwendet wurden. Diese Zeichen lassen sich, wie nebenstehend gezeigt, zu einem Auge zusammensetzen, dem *Horusauge*, das auch *Udschat-Auge*, heiles Auge, genannt wurde. Dieses Auge war in der ägyptischen Welt nach dem Skarabäus das meistverbreitete Amulett.



Aus religiösen Texten können wir die folgende mythologische Deutung erschließen. Horus, der Sohn des Osiris und der Isis, musste mit seinem Onkel Seth um die Herrschaft in Ägypten kämpfen. In Gestalt eines schwarzen Schweins riss Seth seinem Neffen Horus das Auge heraus und zerstückelte es. Thot, der Gott der Weisheit, der auch die Zahlen und damit die Mathematik erfunden hat, setzte mittels Speichel aus den gefundenen Bruchteilen das Auge wie angedeutet zusammen. Addiert man die Teile auf, so erhält man $\frac{63}{64}$. Das fehlende $\frac{1}{64}$ hat Thot dann auf wundersame Weise hinzugefügt und das Auge so zu einem heilen Auge ergänzt.

1 Umformen von Bruchtermen

Um 1500 lernte man in der Schule nur das Addieren und Subtrahieren von natürlichen Zahlen. Das Multiplizieren und erst recht das Dividieren waren hingegen Lehrstoff der Universität, wie wir aus einer natürlich auf Lateinisch gehaltenen Rede Philipp MELANCHTHONS aus dem Jahre 1536 an die Studenten der Universität Wittenberg anlässlich der Einführung eines Lehrers für Mathematik erfahren:
»Die Regeln des Vervielfachens und Teilens schließlich erfordern viel mehr Fleiß, aber bei einiger Anstrengung können sie doch bald begriffen werden. Wie alle anderen Künste verlangt auch diese Kunst Übung und Gebrauch.«*
Wie weit sind wir heute gekommen! Du hast das Teilen in der Grundschule gelernt.
Nun entstand aber aus dem Teilen, weil es oft nicht aufgeht, das Bruchrechnen, bei dem man leicht ins Schwitzen gerät, wenn man nicht mehr recht weiterweiß. Beim Volke waren daher die Brüche wegen ihrer Schwierigkeit verrufen, und so sagte man von jemandem, der in eine schwierige oder aussichtslose Lage geraten war, er sei »in die Brüche geraten«. Heute ist diese Redensart aus dem deutschen Sprachschatz verschwunden, wahrscheinlich deswegen, weil das Bruchrechnen nicht mehr als schwer empfunden wird.
Aus dem Rechnen mit Brüchen entwickelte sich in der Algebra das Rechnen mit Bruchtermen. Wir wünschen dir, dass du aufmerksam und mit viel Fleiß das Umformen von Bruchtermen lernst, damit du am Ende des Jahres nicht in die Brüche gerätst.

Abb. 10.1 Philipp MELANCHTHON (1497 bis 1560) Humanist und Reformator. Wegen seiner Gelehrsamkeit und wegen seiner Organisation des Unterrichts an den protestantischen Universitäten und Lateinschulen nannte man ihn *Praeceptor Germaniae*, Lehrer Deutschlands. Kupferstich von Albrecht DÜRER.

* Deinde multiplicationis et divisionis praecepta aliquanto plus requirunt diligentiae, sed tamen causae cito perspici possunt ab attentis. Exercitationem et usum requirit haec ars, ut aliae omnes. – *Praefatio in arithmeticen*

1.1 Definitionsmenge

Ein Term ist ein Rechenausdruck mit Zahlen und Variablen.
Beispiele für Terme sind: x^2-7; $\frac{3}{7}$; $\frac{a}{b}$; $\frac{a-b}{c+7}$; $3a(a-b)$.
Keine Terme sind: $a+:3$; $3+x-$; $2(-)x)+$.
Im Folgenden werden wir uns hauptsächlich mit Bruchtermen befassen:

> **Definition 11.1:** Ein Quotient zweier Terme heißt **Bruchterm**.

Beispiele für Bruchterme sind: $\frac{3}{x}$; $\frac{2+x}{3-x}$; $\frac{1}{(a+b)^2}$; $\frac{5}{y-y}$.

Keine Bruchterme sind: $3x$; $(a+b)^2$; $1+x+x^2$.

Der Bruchterm $\frac{3}{x-4}$ liefert für fast alle Einsetzungen Zahlenterme. So ergibt sich für $x=0$ der Zahlenterm $\frac{3}{0-4}=\frac{3}{-4}=-\frac{3}{4}$.
Nur die Einsetzung $x=4$ macht Schwierigkeiten; man erhält nämlich $\frac{3}{4-4}=\frac{3}{0}$. Das ist aber kein Zahlenterm, weil man durch null nicht teilen kann. Die Zahl 4 gehört demnach nicht zur Definitionsmenge D des Bruchterms $\frac{3}{x-4}$; denn die Definitionsmenge eines Terms besteht ja gerade aus den Einsetzungen, für die der Term zu einem Zahlenterm wird.
Ein Bruchterm wird nur dann nicht zu einem Zahlenterm, wenn beim Einsetzen der Nenner null wird. Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst nur Bruchterme, bei denen nur eine einzige Variable im Nenner auftritt. Für solche Bruchterme gilt:

> **Satz 11.1:** Die Definitionsmenge eines Bruchterms mit einer Variablen ist die Menge der Zahlen, die man für die Variable einsetzen kann, ohne dass der Nenner null wird.

Zur Bestimmung der Definitionsmenge eines Bruchterms muss man also alle Zahlen ermitteln, für die der Nenner null wird. Man nennt diese Zahlen **Nullstellen des Nenners**. Die Definitionsmenge D eines Bruchterms ist also die Grundmenge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ohne die Menge der Nullstellen des Nenners.
Versteht man unter $A \setminus B$ (gelesen »A ohne B«) die Menge der Elemente von A, die nicht zugleich zu B gehören, so kann man schreiben:

$$\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \text{Menge der Nullstellen des Nenners}}$$

Für unser Beispiel sieht das so aus:

Der Term $\dfrac{3}{x-4}$ hat die Definitionsmenge $D = \mathbb{Q} \setminus \{4\}$.

Die Menge $\mathbb{Q} \setminus \{4\}$ kann man auch kürzer durch die Ungleichung $x \neq 4$ beschreiben.

Beispiele: **1)** $\dfrac{-1}{x-1}$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

2) $\dfrac{x-1}{2x-1}$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

3) $\dfrac{2}{(x-1)(2+x)}$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 1\}$

Es ist nicht immer ganz leicht, die Nullstellen des Nenners zu erkennen. In komplizierteren Fällen empfehlen wir folgendes Vorgehen:

- Nenner null setzen
- Nenner faktorisieren (ausklammern, binomische Formeln anwenden)
- Jeden Faktor einzeln null setzen und die Gleichungen lösen

Beispiele: **1)** $\dfrac{1}{x^2+x}$

NR: $x^2 + x = 0$

$x(x+1) = 0$

$\underline{\underline{x = 0}}$ oder $x + 1 = 0$

$\underline{\underline{x = -1}}$

Also: $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 0\}$

2) $\dfrac{1}{0{,}1x^3 - 8x^2}$

NR: $0{,}1x^3 - 8x^2 = 0$

$x^2(0{,}1x - 8) = 0$

$x^2 = 0$ oder $0{,}1x - 8 = 0$

$\underline{\underline{x = 0}}$ $\quad 0{,}1x = 8$

$x = \frac{8}{0{,}1}$

$\underline{\underline{x = 80}}$

Also: $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 80\}$

3) $\dfrac{x+1}{x^2+6x+9}$

NR: $x^2 + 6x + 9 = 0$

$(x+3)^2 = 0$

$x + 3 = 0$

$\underline{\underline{x = -3}}$

Also: $D = \mathbb{Q} \setminus \{-3\}$

Aufgaben

Gib die Definitionsmenge an:

1. a) $\frac{2,3}{x-2,3}$ b) $\frac{x}{0,1+x}$ c) $\frac{1}{2-x}$ d) $\frac{x+x^2}{x^2}$

2. a) $\frac{2x+6}{2x-6}$ b) $\frac{3}{8-4x}$ c) $\frac{0,1}{8x+8}$ d) $\frac{14}{28+0,7x}$

3. a) $\frac{1}{2x-9}$ b) $\frac{2}{18+4x}$ c) $\frac{3}{0,2x-1,2}$ d) $\frac{4}{3,06+0,01x}$

4. a) $\frac{8a}{(x-1)(x-3)}$ b) $\frac{8b}{(x+2)(4-x)}$

c) $\frac{8c}{(3x+18)(0,8x-1)}$ d) $\frac{8d}{x(2,4x-2\frac{1}{4})}$

5. a) $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ b) $\frac{3x+2}{(2x-3)(3x-2)(2x+3)}$

c) $\frac{0,1x-1}{x(x+0,1)(0,1x+0,1)}$

6. a) $\frac{x}{x^2+x}$ b) $\frac{x^2}{3x-4x^2}$ c) $\frac{x^3}{2x+2+x^2+x}$ d) $\frac{x^4}{7x^4+8x^5}$

7. a) $\frac{7a}{x^2-9}$ b) $\frac{7b}{1-x^2}$ c) $\frac{7c}{4x^2-0,16}$ d) $\frac{7d}{32x^2-2}$

8. a) $\frac{2}{4x^2-1\frac{7}{9}}$ b) $\frac{4}{x^4-16}$ c) $\frac{8}{x^4+16}$ d) $\frac{16}{x^2-x^4}$

9. a) $\frac{1980}{x^2-2x+1}$ b) $\frac{1981}{x^2+4x+4}$ c) $\frac{1982}{6x+9+x^2}$ d) $\frac{1983}{9x^2+4+12x}$

10. a) $\frac{333}{3x^3+6x^2+3x}$ b) $\frac{1492}{10x^3-4x^2+0,4x}$ c) $\frac{1789}{x-25-0,01x^2}$

11. a) $\frac{x+6}{(x-6)(x^2-6^2)}$ b) $\frac{6x}{(6x-1)(1+2x)(6^2x+6)}$

12. a) $\frac{1}{0,0001x^4-1}$ b) $\frac{m\cdot 0\cdot n\cdot(s-te+r)}{9^4x^4-0,02\cdot 9^2\cdot 6^2x^2+0,0001\cdot 6^4}$

13. Gib einen Bruchterm an, bei dem die aufgeführten Zahlen nicht in der Definitionsmenge liegen:

a) 1 b) 1; -2 c) 0; $-\frac{1}{3}$

1.2 Äquivalenz von Bruchtermen

Zwei Brüche können denselben Wert haben, obwohl sie verschiedene Zähler und Nenner haben. So gilt z. B. $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. Bei komplizierteren Zahlen ist die Gleichheit aber nicht mehr so einfach zu sehen. Sind etwa $\frac{34}{51}$ und $\frac{38}{57}$ gleich?

Die Gleichheit zweier Brüche erkennt man leicht, wenn sie gleichen Nenner haben; dann müssen nämlich auch die Zähler gleich sein, damit die Brüche gleich sind. Erweitern wir also $\frac{34}{51}$ und $\frac{38}{57}$ jeweils mit dem Nenner des anderen Bruchs, so erhalten wir $\frac{34 \cdot 57}{51 \cdot 57}$ bzw. $\frac{38 \cdot 51}{57 \cdot 51}$. Die Zähler ergeben jedesmal die Zahl 1938. Also gilt $\frac{34}{51} = \frac{38}{57}$, weil $34 \cdot 57 = 38 \cdot 51$.
Weiß man umgekehrt von zwei Brüchen, dass sie gleich sind, wie z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{6}{8}$, dann ergibt sich mit derselben Überlegung, dass dann auch die Produkte $3 \cdot 8$ und $6 \cdot 4$ gleich sein müssen.
Damit haben wir die Untersuchung der Gleichheit zweier Brüche durch die gleichwertige Untersuchung der Gleichheit zweier Produkte ersetzt.
Genauso können wir die Untersuchung der Äquivalenz von zwei Bruchtermen durch die Untersuchung der Äquivalenz von zwei Produkten ersetzen. Dabei müssen wir allerdings bedenken, dass die Äquivalenz nur auf der gemeinsamen Definitionsmenge der betrachteten Bruchterme sinnvoll ist!
Auf Grund der obigen Überlegungen gilt also

Satz 14.1: Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ Bruchterme, dann gilt in der gemeinsamen Definitionsmenge:
$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc}$$

Beispiel: $T_1(x) = \dfrac{x}{x+1}, \quad D_1 = \mathbb{Q} \setminus \{-1\},$

$T_2(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}, \quad D_2 = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 1\}.$

Die gemeinsame Definitionsmenge ist $D = D_1 \cap D_2 = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 1\}$.

Annahme: $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}$

Prüfung der Annahme:
$$\begin{aligned} x(x^2 - 1) &= (x^2 - x)(x + 1) \\ x^3 - x &= x^3 + x^2 - x^2 - x \\ x^3 - x &= x^3 - x \end{aligned}$$

Links und rechts vom Gleichheitszeichen steht derselbe Term, also sind die Bruchterme $T_1(x)$ und $T_2(x)$ in D äquivalent, d. h., bei jeder Belegung aus D liefern T_1 und T_2 dieselben Werte.

Aufgaben

1. Sind folgende Brüche einander gleich?

   a) $\frac{37}{51}$ und $\frac{481}{663}$ b) $\frac{912}{1377}$ und $\frac{48}{73}$ c) $\frac{107}{43}$ und $2\frac{751}{1333}$

   d) $(\frac{17}{16})^2$ und $1+\frac{297}{48^2}$

2. Für welchen Wert von x sind folgende Brüche einander gleich und wie lauten sie dann?

   a) $\dfrac{18}{x}$ und $1\dfrac{2}{7}$ b) $\dfrac{5x}{16}$ und $\dfrac{3}{4}$ c) $\dfrac{2x+7}{9}$ und $\dfrac{5}{3}$ d) $\dfrac{3x}{7}$ und $\dfrac{x}{9}$

3. Für welchen Wert von x sind folgende Brüche einander gleich und wie lauten sie dann?

   a) $\dfrac{5}{3}=\dfrac{x}{5}$ b) $\dfrac{45}{x}=18$ c) $\dfrac{3x-4}{25}=\dfrac{1}{5}$ d) $\dfrac{9-7x}{3}=\dfrac{-1}{2}$

4. Wann sind Brüche mit gleichem Nenner einander gleich?

5. Wann sind Brüche mit gleichem Zähler einander gleich?

6. Ist es möglich, dass zwei Brüche mit gleichem Zähler und verschiedenen Nennern einander gleich sind?

7. Sind die folgenden Bruchterme äquivalent?

   a) $\dfrac{x}{x+1}$ und $\dfrac{x^2+x}{x^2+2x+1}$ b) $\dfrac{x+1}{x-1}$ und $\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}$

   c) $\dfrac{\frac{1}{2}x^2-4{,}5}{x+3}$ und $\dfrac{x-3}{2}$ d) $\dfrac{x-4}{2x}$ und $\dfrac{x^2-16}{2x^2-8}$

1.3 Erweitern und Kürzen

Die dir vom Rechnen mit Brüchen bekannten Operationen *Erweitern* und *Kürzen** lassen sich auch auf Bruchterme übertragen.

* Das Fachwort **erweitern** wurde vermutlich von dem preußischen Gymnasiallehrer Johann Friedrich KROLL in seinem 1839 erschienenen *Grundriß der Mathematik für Gymnasien und andere höhere Lehranstalten* geprägt.
Eine interessantere Geschichte hat das Fachwort **kürzen**, das erst zu Anfang dieses Jahrhunderts aufgekommen zu sein scheint. Der aus Norddeutschland stammende Theologe und Mathematiker JORDANUS NEMORARIUS (um 1180–1237), der 1222 zum zweiten Ordensgeneral der Dominikaner gewählt wurde, auf dessen Anregung die Universität in Toulouse gegründet wurde und dessen mathematische Schriften lange Zeit in Gebrauch waren, sagte dafür *ad minorem denominationem reducere = auf eine kleinere Benennung zurückführen*. Sein Zeitgenosse GERNARDUS sprach von *subtiliores minutias in grossiores reducere = feiner gebaute Brüche auf gröbere zurückführen*. Der Rechenmeister Christoff RUDOLFF (um 1500 – vor 1543) und andere überschrieben die betreffenden Kapitel mit »Prüch kleiner machen«; für kürzen sagte er *aufheben*, worunter man beim mittelalterlichen Linienrechnen verstand, so viele Rechenpfennige wegzunehmen, dass eine Zahl durch möglichst wenige von ihnen ausgedrückt wurde. (Befanden sich 5 auf einer Linie, so nahm man 4 weg und setzte einen in den Zwischenraum zur nächsthöheren Linie.) Aus *aufheben* wurde zu Beginn des 19. Jh.s *heben*, das sich bis in unser Jh. noch in den Rechenbüchern fand.

Definition 16.1: Ein Bruchterm wird mit einem Term T **erweitert**, indem man sowohl den Zähler wie auch den Nenner des Bruchterms mit diesem Term T multipliziert.
Ein Bruchterm wird mit einem Term T **gekürzt**, indem man sowohl den Zähler als auch den Nenner des Bruchterms durch diesen Term T dividiert.

Den Zusammenhang zwischen dem ursprünglichen Term und dem erweiterten bzw. gekürzten Term klärt

Satz 16.1: Beim Erweitern und Kürzen entstehen äquivalente Bruchterme, nämlich $\frac{a}{b} = \frac{T \cdot a}{T \cdot b}$ d.h., $\frac{a}{b}$ wird mit T erweitert

bzw. $\frac{a \cdot T}{b \cdot T} = \frac{a}{b}$ d.h., $\frac{aT}{bT}$ wird mit T gekürzt.

Beachte: Weil beim Erweitern bzw. Kürzen Faktoren im Nenner hinzukommen bzw. wegfallen, kann sich die Definitionsmenge des Bruchterms ändern. Die Äquivalenz gilt natürlich nur in der gemeinsamen Definitionsmenge. Dazu die

Beispiele:

1) Erweitert man $\frac{3-x}{3+x}$, $D_1 = \mathbb{Q}\setminus\{-3\}$, mit dem Term $3-x$, so entsteht der Bruchterm $\frac{(3-x)^2}{(3+x)(3-x)}$, $D_2 = \mathbb{Q}\setminus\{-3; 3\}$. Also gilt $\frac{3-x}{3+x} = \frac{(3-x)^2}{(3+x)(3-x)}$ in der gemeinsamen Definitionsmenge $D = D_1 \cap D_2 = \mathbb{Q}\setminus\{-3; 3\}$.

2) Will man den Bruchterm $\frac{3x^2-3x^3}{9x+27x^2}$ kürzen, so muss man zuerst Zähler und Nenner faktorisieren. Man erhält $\frac{3x^2-3x^3}{9x+27x^2} = \frac{3x^2(1-x)}{9x(1+3x)}$. Jetzt erkennt man die Definitionsmenge $D_1 = \mathbb{Q}\setminus\{-\frac{1}{3}; 0\}$. Wir können den Bruchterm mit $3x$ kürzen und erhalten $\frac{x(1-x)}{3(1+3x)}$ mit $D_2 = \mathbb{Q}\setminus\{-\frac{1}{3}\}$. Also gilt $\frac{3x^2-3x^3}{9x+27x^2} = \frac{x(1-x)}{3(1+3x)}$ in der gemeinsamen Definitionsmenge $D = D_1 \cap D_2 = \mathbb{Q}\setminus\{-\frac{1}{3}; 0\}$.

3) Enthalten die Terme mehr als eine Variable, dann ist die Angabe der Definitionsmenge recht kompliziert; wir wollen daher in solchen Fällen darauf verzichten. Als Muster diene

$$\frac{a+b}{a^2-b^2} = \frac{(a+b)\cdot 1}{(a+b)(a-b)} = \frac{1}{a-b}.$$

Beim Rechnen mit Potenzen haben wir die Division zweier Potenzen mit gleicher Basis (z. B. $a^5 : a^3$) ausgespart. Jetzt erkennen wir, dass es sich dabei um einen speziellen Bruchterm handelt. Schreibt man die Potenzen in Zähler und Nenner als Produkte, dann lassen sich die gemeinsamen Faktoren wegkürzen:

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a\cdot a} = a\cdot a = a^2.$$

Weil $a^2 = a^{5-3}$ gilt, kann man auch schreiben

$$\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2.$$

In gleicher Weise erhält man etwa

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^{5-3}} = \frac{1}{a^2}.$$

Das führt zu

Satz 17.1: Ist $\boldsymbol{m > n}$, dann gilt $\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$. Ist $\boldsymbol{m < n}$, dann gilt $\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}}$. Dabei muss $a \neq 0$ sein.

Sind im Zähler und im Nenner gleich viele Faktoren a, dann hat der Bruch den Wert 1, z. B. $\frac{a^4}{a^4} = 1$.

Rechnet man $\frac{a^5}{a^5}$ genauso wie $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$, dann erhält man $\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0$. Da wir aber schon wissen, dass $\frac{a^5}{a^5}$ den Wert 1 hat, legt man allgemein fest

Definition 17.1: $\boldsymbol{a^0 := 1}$ für $a \neq 0$.

0^0 wird ebenso wie $\frac{0}{0}$ nicht definiert.

Aufgaben

1. Erweitere:

a) $\frac{3}{4}$ mit 17 **b)** $\frac{2a}{5b}$ mit -21 **c)** $17:13$ mit x

d) $5p:(2q)$ mit pq **e)** $\frac{9a+1}{a-3}$ mit $2a^2$ **f)** $\frac{5cd^2}{3}$ mit $2c+d$

g) $\frac{3u+v}{3u-v}$ mit $-(3u-v)$ **h)** $[3n(2+m^2)]:(7m^2-n^2)$ mit $4-2m^2$

i) $\frac{7x-24}{3x+y}$ mit $5x+4y$ **k)** $(7a^2-5ab-b^2):(3-2ab)$ mit -1

2. a) Schreibe 1 als Bruch mit dem Nenner 29.
b) Schreibe 5 als Bruch mit dem Nenner -7.
c) Schreibe $-a$ als Bruch mit dem Nenner b.
d) Schreibe $3x^2y$ als Bruch mit dem Nenner y^2.
e) Schreibe $5u^2-20uv$ als Bruch mit dem Nenner $u+4v$.
f) Schreibe 0 als Bruch mit dem Nenner $(3+z)^2$.

3. a) Schreibe 64 als Bruch mit dem Zähler 1024.
b) Schreibe $-8a^2b$ als Bruch mit dem Zähler $16(ab)^2$.
c) Schreibe $4p-3q$ als Bruch mit dem Zähler $3q-4p$.
d) Schreibe $3-7n$ als Bruch mit dem Zähler $9-49n^2$.

4. Bringe die folgenden Brüche auf den angegebenen Nenner.

a) $\frac{5}{2a+b}$; $\frac{7a+b}{2a-b}$; $\frac{b-a}{b-2a}$; $\frac{2a+b}{1}$; Nenner $4a^2-b^2$

b) $\frac{q+2}{p}$; $\frac{3p}{q+1}$; $\frac{7p-3q}{q-1}$; $\frac{q-1}{p(q+1)}$; Nenner pq^2-p

c) $\frac{5m^2n}{3}$; $\frac{6m+4n}{3m-2n}$; $\frac{1}{9m-6n}$; $\frac{a-8b}{(3m-2n)^2}$; Nenner $27m^2-36mn+12n$

5. Bringe die folgenden Brüche auf den angegebenen Nenner.

a) $\frac{a+b}{a-b}$ Nenner a^2-b^2 **b)** $\frac{x-y}{x+y}$ Nenner x^2-y^2

c) $\frac{2a-3b}{5a-4b}$ Nenner $25a^2-16b^2$ **d)** $\frac{4p-q}{2p+3q}$ Nenner $4p^2-9q^2$

e) $\frac{r+s}{3r-2s}$ Nenner $9r^2-4s^2$ **f)** $\frac{2a+3}{a-1}$ Nenner a^2-1

g) $\frac{2x-3}{x-3}$ Nenner $9-x^2$ **h)** $\frac{4x+5}{5-2x}$ Nenner $4x^2-25$

6. Bringe die folgenden Brüche auf den angegebenen Nenner N.

a) $\dfrac{a+b}{a-b}$ $\quad N = a^2 - 2ab + b^2$ **b)** $\dfrac{x-y}{x+y}$ $\quad N = x^2 + 2xy + y^2$

c) $\dfrac{2a-3b}{a+2b}$ $\quad N = a^2 + 4ab + 4b^2$ **d)** $\dfrac{p+q}{p-3q}$ $\quad N = p^2 - 6pq + 9q^2$

e) $\dfrac{5r-7s}{2a-3}$ $\quad N = 4a^2 - 12a + 9$ **f)** $\dfrac{2x-5}{3x-1}$ $\quad N = 9x^2 - 6x + 1$

•**7.** Bringe die folgenden Brüche auf den angegebenen Nenner N.

a) $\dfrac{4x-9}{x-7}$ $\quad N = x^2 - 16x + 63$ **b)** $\dfrac{2a+7}{a-3}$ $\quad N = a^2 + 5a - 24$

$\dfrac{3u-11}{u+5}$ $\quad N = u^2 - 4u - 45$ **d)** $\dfrac{6z-1}{z-7}$ $\quad N = z^2 - 5z - 14$

e) $\dfrac{2a-9}{7a+3}$ $\quad N = 42a^2 - 10a - 12$ **f)** $\dfrac{6x-5}{7x-5}$ $\quad N = 21x^2 + 13x - 20$

g) $\dfrac{11x-9}{2x-5}$ $\quad N = 16x^2 - 46x + 15$ **h)** $\dfrac{3u+8}{5u-6}$ $\quad N = 40u^2 - 53u + 6$

i) $\dfrac{7r^2-3}{8r^2-3}$ $\quad N = 56r^4 + 19r^2 - 15$ **j)** $\dfrac{3a^2+7}{6a^2+5}$ $\quad N = 48a^4 - 2a^2 - 35$

k) $\dfrac{2a-7b}{7a-9b}$ $\quad N = 56a^2 - 51ab - 27b^2$ **l)** $\dfrac{7x-5y}{4x-3y}$ $\quad N = 36x^2 - 7xy - 15y^2$

8. Bestimme die fehlenden Zähler und Nenner.

a) $\dfrac{11x-7}{5x+3} = \dfrac{\dots}{3+5x}$ **b)** $\dfrac{11x-7}{5x+3} = \dfrac{7-11x}{\dots}$

c) $\dfrac{(2x)^2}{3} = \dfrac{\dots}{12-3x}$ **d)** $\dfrac{z-2}{12z+1} = \dfrac{5z^2-20}{\dots}$

e) $\dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{\dots}{x^2+3x+2}$ **f)** $\dfrac{x-4}{5-x} = \dfrac{x^2+x-20}{\dots}$

g) $\dfrac{7s-t}{4s+3} = \dfrac{\dots}{8s^2+6s} = \dfrac{\dots}{16s^2+24s+9} = \dfrac{2t^2-98s^2}{\dots}$

9. Löse folgende Gleichungen für die Unbekannte x.

a) $\dfrac{x}{5} = 0$ **b)** $\dfrac{6x^2}{x+3} = \dfrac{5u^2 \cdot 0}{x^2-9}$ **c)** $7x : (3a) = 0$

d) $2x : (a^2+1) = 0 : 7$ **e)** $\dfrac{2x-3}{9} = 0$ **f)** $\dfrac{(9x-6)^2 a^3}{4b} = \dfrac{0}{36b}$

10. Erweitere den Bruch

a) $\dfrac{7r-9s}{5p-3q}$ auf den Nenner $10pr-15ps-6qr+9qs$

b) $\dfrac{2x+3y}{7m-4n}$ auf den Nenner $35mx-28my-20nx+16ny$

c) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{2a-3b}$ auf den Nenner $8a^3-12a^2b+18ab^2-27b^3$

d) $\dfrac{5p-6q}{4p-5q}$ auf den Nenner $24ap-36bp-30aq+45bq$

e) $\dfrac{7x^2-9y^2}{5u-3z}$ auf den Nenner $35x^2u-21x^2z-40y^2u+24y^2z$

f) $\dfrac{2x-3y}{7x^2y-4xy^2}$ auf den Nenner $14x^5y^3-63x^3y^2-8x^4y^4+36x^2y^3$

g) $\dfrac{4x^2-3y}{23a^2-35b}$ auf den Nenner $92a^2x^2-69a^2y-140bx^2+105by$.

11. Erweitere den Bruch

a) $\dfrac{a-b}{a^2+ab+b^2}$ auf den Nenner a^3-b^3

b) $\dfrac{a+b}{a^2-ab+b^2}$ auf den Nenner a^3+b^3

c) $\dfrac{a}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$ auf den Nenner a^4-b^4

d) $\dfrac{a}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}$ auf den Nenner a^4-b^4.

Kürze die in den Aufgaben **12** bis **16** angegebenen Quotienten so weit wie möglich!

12. a) $\dfrac{93}{124}$ b) $\dfrac{-16a}{12b}$ c) $\dfrac{45(x+1)}{5}$ d) $\dfrac{18p}{-9}$

13. a) $\dfrac{6uvw}{3uw}$ b) $\dfrac{14xyz}{21xy}$ c) $\dfrac{49pq}{28pq}$ d) $\dfrac{3(a+2b)}{9(a+2b)}$

14. a) $x^4 : x$ b) $y^2 : y^5$ c) $3z^9 : (12z^8)$ d) $[16(u-v)^3] : [8(u-v)^2]$

15. a) $\dfrac{24a^2bc^3}{9a^3b^2c}$ b) $\dfrac{69p^5q^2r^4}{46(pr)^3}$ c) $\dfrac{15(a^2b)^2c^3}{(5a)^3(bc)^2}$ d) $\dfrac{44(uv)^2u^3}{12(u^2v)^3}$

16. a) $(4u-v)^2 : [2(4u-v)]$ b) $(4u-v) : [2(4u-v)]^2$
c) $[xy(5x-2y)^2] : [x(2y-5x)]$ d) $(7p-4q)^3 : (35p-20q)^2$

17. Vereinfache durch Kürzen:

a) $\frac{a^7}{a^3}$ b) $a^{11} : a$ c) $\frac{a^4}{a^4}$ d) $\frac{a^2}{a^9}$ e) $a^6 : a^7$

18. Kürze den Bruch

a) $\frac{abc}{bcd}$ b) $\frac{axy}{bxy}$ c) $\frac{pq^2r}{pq}$ d) $\frac{a}{ax}$ e) $\frac{abc}{4abcd}$

f) $\frac{a^2x^3}{7a^2x^3y^2}$ g) $\frac{12x^4}{8x^3}$ h) $\frac{7a^3b^2}{56a^2b^3}$ i) $\frac{24a^5b^7}{36a^8b^4}$

k) $\frac{75x^4y^3z^5}{105x^4y^3z^5}$ l) $\frac{165r^2s^3t^7}{187r^5s^6t^4}$ m) $\frac{147a^4p^3x^6}{189a^4bcx^8}$.

• **19.** Kürze den Bruch

a) $\frac{ax+bx}{cx}$ b) $\frac{12ax-18ay}{24ap+30aq}$ c) $\frac{25rx-35ry}{35sx-49sy}$

d) $\frac{65a^2x^2+91ax^3}{85a^2x+119ax^2}$ e) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$ f) $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$

g) $\frac{15xy-25y^2}{9x^2-30xy+25y^2}$ h) $\frac{21a^2+9a}{49a^2+42a+9}$ i) $\frac{50a^3-72ab^2}{25a^2-60ab+36b^2}$.

Zerlege in den Aufgaben **20** bis **30** Zähler und Nenner in Faktoren und kürze.

20. a) $\frac{3m+6n}{8m+16n}$ b) $\frac{6x-24y}{6x-18y}$ c) $\frac{4a+6b}{3b+2a}$ d) $\frac{4a-6b}{3b-2a}$

21. a) $\frac{1{,}5n-4{,}5m}{6n-18m}$ b) $\frac{6u-2{,}4v}{5u-2v}$ c) $\frac{4a-12ab}{8a^2+20ab}$ d) $\frac{18c^3d+6c^2d^2}{14cd^3+42c^2d^2}$

22. a) $\frac{2x+1}{4x^2+4x+1}$ b) $\frac{9y^2-12yz+4z^2}{9y-6z}$

c) $\frac{4a+1}{32a^2-2}$ d) $\frac{45p^2-20q^2}{21p-14q}$

23. a) $\frac{64-25a^2}{64-80a+25a^2}$ b) $\frac{0{,}16b^2+2b+6{,}25}{160b^2+2000b+6250}$

c) $\frac{1600x^2-1000y^2}{25y^2-40x^2}$ d) $\frac{18d^2-48d+32}{2{,}25d^2-4}$

24. a) $\frac{ax-bx+ay-by}{5a-5b}$ b) $\frac{3a+2ab-9b-6b^2}{3+2b}$

c) $\frac{7ab-35a^2-10a+2b}{-10a+2b}$ d) $\frac{1-x+x^2-x^3}{1+x^2}$

• 25. a) $\dfrac{16m^2 - 9n^2}{8m^2 - 6mn + 4m - 3n}$ b) $\dfrac{5p^2 + p + q + 5pq}{25p^2 + 10p + 1}$

c) $\dfrac{8a + 9b - 12ab - 6}{8a^2b - 12a^2b^2}$ d) $\dfrac{10u^2 - 8uv + 5uw - 4vw}{5u^2 - 4uv + 10uw - 8vw}$

26. a) $\dfrac{(x-y)x + y(x-y)}{x^2 - y^2}$ b) $\dfrac{(x-y)^2 x + (x-y)^2 y}{x^3 - xy^2}$

• c) $\dfrac{x^4 - 1}{x(x^2+1) + x^2 + 1}$ d) $\dfrac{x^4 - x^2}{x^3 + 2x^2 + x}$

• 27. a) $\dfrac{u^2 + v^2 - w^2 + 2uv}{u + v + w}$ b) $\dfrac{4p^2 - 4pq + q^2 - 25r^2}{4p - 2q + 10r}$

c) $\dfrac{m^2 + 2mn + n^2 - 1}{m^2 - n^2 - 2m + 1}$ d) $\dfrac{a^4 - 8a^2 + 16}{a^3 - 4a^2 - 4(a-4)}$

e) $\dfrac{75my^2 + 50ny^2 - 30myz - 20nyz + 3mz^2 + 2nz^2}{-45m^{2y} + 9m^2z - 60mny + 12mnz - 20n^2 + 4n^2z}$

28. Vereinfache so weit wie möglich.

a) $\dfrac{25a^2 - 100b^2}{5a + 10b}$ b) $\dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$

• c) $\dfrac{z^2 - 4z + 3}{z^2 - 2z - 1}$ • d) $\dfrac{z^2 - 2z - 3}{z^2 + 2z + 1}$

⁚ 29. a) $\dfrac{a^2 + ab - 12b^2}{a^2 - ab - 20b^2}$ b) $\dfrac{p^2 + pq - 20q^2}{p^2 + 2pq - 15q^2}$

c) $\dfrac{r^2 + 4rs - 21s^2}{r^2 + 12rs + 35s^2}$ d) $\dfrac{x^2 - 8xy + 15y^2}{x^2 + xy - 30y^2}$

e) $\dfrac{a^2 + 5ab - 14b^2}{a^2 + 12ab - 28b^2}$ f) $\dfrac{p^2 - 4pq - 45q^2}{p^2 - pq - 30q^2}$

g) $\dfrac{15r^2 + rs - 6s^2}{12r^2 + 5rs - 2s^2}$ h) $\dfrac{4x^2 + 20xy + 25y^2}{6x^2 + 23xy + 20y^2}$

i) $\dfrac{15p^2 - 19pq - 56q^2}{15p^2 - 58pq + 48q^2}$ j) $\dfrac{18u^2 - 3uv - 10v^2}{53uv - 40v^2 - 6u^2}$

k) $\dfrac{64x^3y - 136x^2y^2 + 42xy^3}{48x^3y - 140x^2y^2 + 98xy^3}$ l) $\dfrac{48a^3 - 2a^2b - 35ab^2}{36a^2b + 60ab^2 + 25b^3}$

m) $\dfrac{72x^2z + 7xyz - 2y^2z}{40x^3y - 29x^2y^2 + 3xy^3}$ n) $\dfrac{6x^3z - 24xy^2z}{2x^3y - 8x^2y^2 + 8xy^3}$

30. a) $\dfrac{14a^2x^2 - 63a^2y^2 - 8b^2x^2 + 36b^2y^2}{49a^4 - 56a^2b^2 + 16b^4}$

b) $\dfrac{8a^2u^2 - 3b^3 - 6abu + 4ab^2u}{12a^3u^2 - 9a^2bu + 20abu - 15b^2}$

c) $\dfrac{15a^2 - 21bc - 35ab + 9ac}{9ab - 15ac - 21b^2 + 35bc}$ d) $\dfrac{48ax - 42bx + 40ay - 35by}{16au - 14bu - 24av + 21bv}$

1.4 Hauptnenner

Bruchterme mit gleichem Nenner heißen **gleichnamig**; haben sie verschiedene Nenner, dann heißen sie **ungleichnamig***. So sind zum Beispiel die Bruchterme $\dfrac{b}{a^2+ac}$ und $\dfrac{d}{a(a+c)}$ gleichnamig, die Bruchterme $\dfrac{b}{a^2+ac}$ und $\dfrac{d}{a(a-c)}$ ungleichnamig.

Ungleichnamige Bruchterme lassen sich ebenso wie Brüche, deren Zähler und Nenner Zahlen sind, durch Erweitern gleichnamig machen. Man muss dazu als gemeinsamen Nenner einen Term finden, in dem jeder einzelne Nenner als Faktor enthalten ist. Zum Beispiel ist das Produkt aller vorkommenden Nenner ein gemeinsamer Nenner. In vielen Fällen ist es jedoch möglich, einen einfacheren gemeinsamen Nenner anzugeben. Man zerlegt dazu jeden Nenner so weit wie möglich in Faktoren und ermittelt wie bei Zahlen das kleinste gemeinsame Vielfache (kurz: kgV) der Nenner. Den so bestimmten gemeinsamen Nenner bezeichnet man als *Hauptnenner* (kurz: HN).

Definition 23.1: Unter dem **Hauptnenner** von Bruchtermen versteht man das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner dieser Bruchterme.

Beispiel: $\dfrac{u}{4a^2-9b^2}$; $\dfrac{v}{10a+15b}$; $\dfrac{w}{2ac-3bc}$

Nenner Faktorisierung	Erweiterungsfaktoren (EF)
$4a^2 - 9b^2 = (2a+3b)(2a-3b)$	$5c$
$10a + 15b = 5(2a+3b)$	$c(2a-3b)$
$2ac - 3bc = c(2a-3b)$	$5(2a+3b)$

$\text{HN} = 5c(2a+3b)(2a-3b)$

* Bernardo Barlaam (um 1290–nach 1348), Mönch, später Bischof von Gerace in Kalabrien, verwendet in seiner griechisch verfassten *logistica* die Ausdrücke *συνώνυμος* (synónymos) und *ἑτερώνυμος* (heterónymos), die wörtlich übersetzt **gleich-** bzw. **ungleichnamig** ergeben. Im Deutschen des 15. und 16. Jh.s gibt es dafür allerlei Ausdrücke; *gleichnamig machen* verwendet der zu seiner Zeit bekannte Rechenmeister Simon Jacob (1510(?) Coburg – 1564 Frankfurt) in seinem *Ein New vnd Wolgegründt Rechenbuch* (1565).

Mithilfe der Erweiterungsfaktoren können wir die gegebenen Brüche gleichnamig machen:

$$\frac{u}{4a^2-9b^2} = \frac{5cu}{5c(2a+3b)(2a-3b)}$$

$$\frac{v}{10a+15b} = \frac{cv(2a-3b)}{5c(2a+3b)(2a-3b)}$$

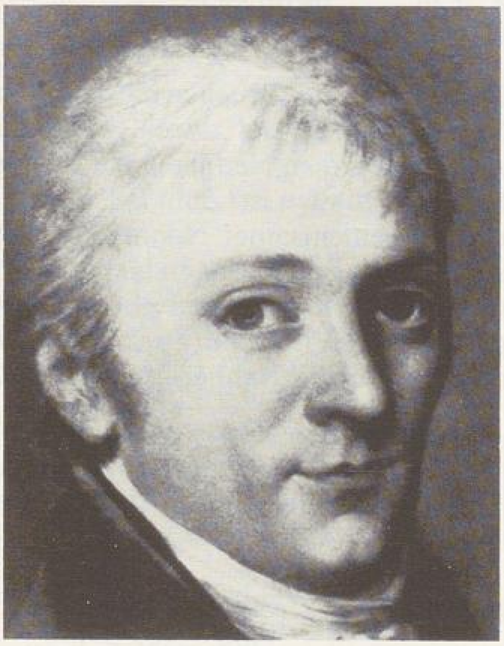
$$\frac{w}{2ac-3bc} = \frac{5w(2a+3b)}{5c(2a+3b)(2a-3b)}.$$

**Zur Geschichte des Hauptnenners

Im 九章算術 (*Chiu Chang Suan Shu*)* – »Neun Bücher arithmetischer Technik« – der Han-Zeit (202 v. Chr. – 9 n. Chr.) wird der Hauptnenner als Produkt aller Nenner eingeführt, bei den Aufgaben von Buch IV wird meist jedoch das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner als Hauptnenner genommen, ohne dass angegeben wird, wie man es findet. Die Araber wie z. B. AL-KARADSCHI (†1019/29) und auch LEONARDO VON PISA (um 1170 – nach 1240) bestimmten den Hauptnenner mehrerer Nenner schrittweise, indem sie zuerst das Produkt von zwei Nennern durch deren größten gemeinsamen Teiler teilten; genauso verfuhren sie mit der so erhaltenen Zahl und dem dritten Nenner usw.

Auch BHĀSKARA II (1115 – nach 1178), ein indischer Astronom und Mathematiker, der das gesamte mathematische Wissen seiner Zeit zusammenfasste, sagte im *Lilavati* – »Die Schöne« – (das Werk ist tatsächlich einer schönen Frau gewidmet, die öfters angesprochen wird), dass der intelligente Rechner nicht immer das Produkt aller Nenner als Hauptnenner nehme.

Das Zerlegungsverfahren zum Aufsuchen des Hauptnenners, das du schon in der 6. Klasse gelernt hast, hat 1801 der große deutsche Mathematiker Carl Friedrich GAUSS (1777–1855) in seinen *Disquisitiones arithmeticae* – »Untersuchungen über höhere Arithmetik« – beschrieben.



1803

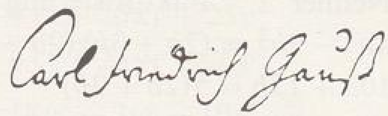


Abb. 24.1 Carl Friedrich GAUSS [Gauß] (30. 4. 1777 Braunschweig – 23. 2. 1855 Göttingen) – Pastell von Johann Christian August SCHWARTZ (1756–1814).
Mathematicorum princeps – »Fürst der Mathematiker« – stand auf der Gedenkmedaille, die der König von Hannover 1855 prägen ließ.

* gesprochen tschiu tschang suan schu

Der Ausdruck **kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches** erscheint 1825 in *Die reine Elementar-Mathematik* des Gymnasiallehrers und späteren Professors Martin OHM (1792 Erlangen – 1872 Berlin). Wer den Ausdruck **Hauptnenner** einführte, konnten wir nicht herausfinden. Im *Algorismus Ratisbonensis* hieß er noch der *gemain nenner*.

Aufgaben

1. Sind folgende Brüche gleichnamig?

a) $\frac{3}{7}$ und $\frac{4}{4^2-3^2}$ **b)** $\frac{1}{5\cdot 7-6^2}$ und $\frac{1}{3^4-5\cdot 2^4}$

c) $\frac{3^2\cdot 2^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$ und $\frac{10}{11^2-1}$ **d)** $\frac{7}{(a+2)(a-1)}$ und $\frac{3a}{a^2+a-1}$

e) $\frac{5x^2+1}{3x^2-12}$ und $\frac{7x-2}{(x+2)(x-2)\cdot 3}$ **f)** $\frac{2a-3b}{a^3-b^3}$ und $\frac{5}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

2. Für welche Werte von x sind folgende Brüche gleichnamig?

a) $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{x-2}$ **b)** $\frac{a}{2x+3}$ und $\frac{b}{18}$ **c)** $\frac{y}{4x}$ und $\frac{z}{x^2}$

d) $\frac{m}{(2x+3)(2x-3)}$ und $\frac{n}{x(4x+3)-3(x+3)}$

3. Mache gleichnamig

a) $\frac{7}{24}$; $\frac{3}{64}$ **b)** $\frac{2}{7\cdot 11-5\cdot 13}$; $\frac{34}{3^2\cdot 14-6\cdot 23}$

c) $\frac{a}{-2}$; $\frac{3}{2a}$ **d)** $\frac{5}{x^2}$; $\frac{1}{3x}$

e) $\frac{2u}{3}$; $\frac{5u}{3u-3}$ **f)** $\frac{1}{3p}$; $\frac{7}{4q}$

g) $\frac{a}{7c^2d^3}$; $\frac{b}{2c^3d^2}$ **h)** $\frac{y}{10(x+1)}$; $\frac{y^2}{5(x^2-1)}$.

4. Bringe auf gleichen Nenner

a) $\frac{c-d}{a+b}$; $\frac{a+b}{c+d}$ **b)** $\frac{5-x}{2x^2-8}$; $\frac{x+3}{3x^2-12}$

c) $\frac{1}{6x-3}$; $\frac{x^2+5}{8x^3-4x^2}$ **d)** $\frac{b}{a^2-9}$; $\frac{c}{3a-9}$

e) $\frac{1+2z}{4-z^2}$; $\frac{3z}{z^2-4z+4}$ **f)** $\frac{1}{n^4-9m^2n^2}$; $\frac{1}{n^2+3mn}$

g) $\dfrac{p+1}{p^2q+p^2}$; $\dfrac{p-1}{pq^2-pq}$; $\dfrac{2}{q^3-q}$

h) $\dfrac{a}{(xy)^2-y^2}$; $\dfrac{b}{2x^2y+2y}$; $\dfrac{c}{x^4-1}$

i) $\dfrac{ab}{2a+3b}$; $\dfrac{2a}{12a^2+36ab+27b^2}$; $\dfrac{(2a-3b)^2}{2a}$; $\dfrac{1}{3b}$.

5. Bestimme den Hauptnenner und die Erweiterungsfaktoren.

a) $\dfrac{1}{4a}$; $\dfrac{1}{2a^3+3a^2}$; $\dfrac{1}{8a^2-12a}$

b) $\dfrac{a}{5x^2-5x}$; $\dfrac{b}{x^2y^2+xy^2}$; $\dfrac{c}{x-x^3}$

c) $\dfrac{x}{144m^2-144mn+36n^2}$; $\dfrac{y}{3n^2+12mn+12m^2}$; $\dfrac{z}{2m^2-0{,}5n^2}$

d) $\dfrac{1}{x+5}$; $\dfrac{2}{4x-28}$; $\dfrac{3}{x^2-2x-35}$

e) $\dfrac{a}{ax^2+3bx^2+a+3b}$; $\dfrac{b}{-4a+4ax^2+12bx^2-12b}$

f) $\dfrac{p}{m^3-405n^3+5m^2n-81mn^2}$; $\dfrac{q}{-m^3-225n^3+9m^2n+25mn^2}$

6. Kürze zuerst und mache dann gleichnamig. Berechne zum Vergleich auch den Hauptnenner der ungekürzten Brüche.

a) $\dfrac{15ab}{6a-3b}$; $\dfrac{2a^2+ab}{4a^2+4ab+b^2}$; $\dfrac{6ab-3b^2}{4a^2-b^2}$

b) $\dfrac{9x}{3x+12}$; $\dfrac{2x^3}{8x^2+x^3}$; $\dfrac{-4x-x^2}{x^2+12x+32}$

c) $\dfrac{3x+6}{2x^2+8x+8}$; $\dfrac{10-5x}{4x^2-16x+16}$; $\dfrac{x^2-2x}{196-49x^2}$

**1.5 Zur Geschichte der Brüche

Um 3000 v. Chr. entstand die Schrift fast gleichzeitig bei den SUMERERN, wie Tontafelfunde aus Uruk am Euphrat zeigen, und bei den Ägyptern, wobei wir nicht ausschließen können, dass die Ägypter von der Entdeckung der Schrift durch die Sumerer gehört hatten.
So verschieden, wie die Schrift dieser beiden Völker war, so verschieden war auch die Entwicklung der Schreibweise für Brüche und damit erst recht der dazugehörigen Rechentechnik. Im Wesentlichen drückten die ÄGYPTER beliebige Brüche durch Stammbrüche, also durch Brüche mit dem Zähler 1 aus. Gewöhnlich schrieben sie einen Stammbruch so, dass sie über das Zahlzeichen die Hieroglyphe 𓂋 setzten, die neben Mund auch Teil bedeutete; $\frac{1}{4}$ schrieb man also $\overset{𓂋}{\text{IIII}}$. Interessanterweise ist unsere Nachsilbe *-tel*, mit der wir Brüche bezeichnen, auch aus dem Wort *Teil* entstanden. So finden wir z. B. 1514 im *Ain New geordnet Rechenbiechlin auf den linien mit Rechenpfeningen* des Jakob KÖBEL (1460/65 Heidelberg – 1533 Oppenheim) den Bruch $\frac{\text{XX}}{\text{XXXI}}$ als zwentzigk ainundreysigk tail erklärt.

Abb. 27.1 Tontafel aus Uruk, etwa 3300 bis 3200 v. Chr., Höhe 6,4 cm, Breite 4,7 cm, eine Warenliste darstellend. ○ bedeutet vermutlich 10, ▷ 1 oder 60.

Obwohl die Ägypter außer $\frac{2}{3}$ nur Stammbrüche durch Zeichen darstellten, rechneten sie natürlich mit anderen Brüchen; schreiben mussten sie sie aber als Summe von Stammbrüchen (Abbildung 27.2).

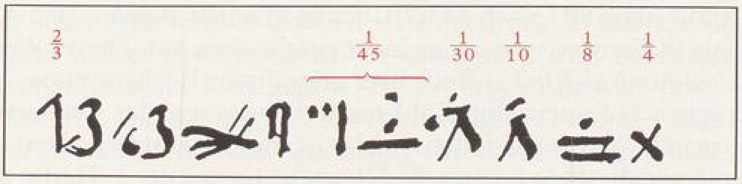


Abb. 27.2 Aufgabe 23 des *Papyrus Rhind* (um 1550 v. Chr.), ägyptisch von rechts nach links gelesen: Ergänze $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{1}{45}$ zu $\frac{2}{3}$. In der hier verwendeten hieratischen Schrift wurde die Hieroglyphe 𓂋 zu einem Punkt über dem Zahlzeichen*. – Welcher Bruch wird durch die Summe der Stammbrüche dargestellt? Was ergibt sich als Lösung?

Im Gegensatz zu den Ägyptern, die mit dem konstanten Zähler 1 arbeiteten, entwickelten im Zweistromland um 2000 v. Chr. die Gelehrten der BABYLONIER aus der sumerischen Zahlenschreibung ein Stellenwertsystem mit der Grundzahl 60, in dem sich ähnlich wie in unserem Dezimalsystem auch Brüche darstellen lassen; wir könnten bei den

* lies hi-eratisch und Hi-eroglyphe. In beiden Wörtern steckt das griechische ἱερός (hi-erós) = *heilig*. Hieroglyphen sind die eingemeißelten (γλύφειν [glýphein] = *einmeißeln*) heiligen Zeichen, aus denen die abgekürzten Schreibzeichen der Papyri wurden, die man hieratisch nennt.

Babyloniern gewissermaßen von einem Bruchrechnen mit konstantem Nenner sprechen, würde die 60er-Teilung nicht immer weiter fortgesetzt. Geschrieben werden nur die Zähler, nicht die Nenner. Unser $\frac{1}{32}$ stellt sich dar als  , d.h. als $\frac{1}{60} + \frac{52}{3600} + \frac{30}{216\,000}$. Im 3. Jh. v. Chr. begann das babylonische Sexagesimalsystem seinen Siegeszug als Handwerkszeug für Mathematik und Astronomie und wurde erst ab dem 15. Jh. im Abendland vom Dezimalsystem verdrängt. Es wirkt aber heute noch nach in der Einteilung des Winkelgrades in 60′ und 3600″ und der Stunde in 60 Minuten und 3600 Sekunden.

Von den Ägyptern haben die GRIECHEN gelernt. Die Stammbruchdarstellung der Brüche findet sich bei ihnen bis in die spätbyzantinische Zeit. Parallel dazu schreiben sie aber allgemeine Brüche mit ihren Zahlzeichen, nämlich ihren Buchstaben, die zur Unterscheidung von ihnen entweder überstrichen werden oder einen Akzent erhalten. Da δ die Zahl 4 und ε die Zahl 5 bezeichnet, schreiben sie $\frac{4}{5}$ als $\bar{\delta}\,\varepsilon'$ oder als $\delta'\,\varepsilon''$. Da dies aber auch als $4\frac{1}{5}$ gelesen werden könnte, erzielen sie Eindeutigkeit durch Verdoppelung des Nenners, schreiben also $\bar{\delta}\,\varepsilon'\,\varepsilon'$ bzw. $\delta'\,\varepsilon''\,\varepsilon''$, wie wir bei HERON VON ALEXANDRIA (um 62 n. Chr.) lesen können. Aber bereits in einem Papyrus des 1. vorchristlichen Jahrhunderts finden wir für $\frac{4}{5}$ die Schreibweise $\begin{matrix}\varepsilon\\\delta\end{matrix}$, also den Zähler unter dem Nenner!

Vergessen wir die mathematisch nicht sehr begabten RÖMER, deren Behandlung der Brüche ungenießbar ist. Der Kuriosität halber erwähnen wir nur, dass bei den frühen CHINESEN der Zähler als »Sohn« und der Nenner als »Mutter« des Bruches bezeichnet wurden.

Die INDER dehnten ihr dezimales Stellenwertsystem nicht auf Brüche aus, sondern verwendeten in ihren astronomischen Schriften, den *Siddhantas* (5. Jh.) die babylonischen Sexagesimalbrüche. Für die gemeinen Brüche* ist eine Ziffernschreibweise erst bei SCHRĪDHARA (um 900) belegt, und zwar wird der Zähler über den Nenner geschrieben; bei gemischten Zahlen stehen die Ganzen noch darüber: $\begin{matrix}6\\1\\7\end{matrix} = 6\frac{1}{7}$.

Die ARABER bringen durch die Verschmelzung griechischer und indischer Wissenschaft die Mathematik zu neuer Blüte. Und hier ist es wieder ABU ABDALLAH MUHAMMAD IBN MUSA AL-CHARIZMI (um 780 – nach 847(?)), der nach seiner *Algebra* eine Abhandlung über das dezimale Stellenwertsystem der Inder geschrieben hat. Dieses Werk, das vermutlich *al-Kitab al-hisab al-Hind* – »Buch über die indische Rechenweise« – hieß, ist die Quelle, von der aus sich die neuartige Zahlenschreibweise und das Rechnen mit diesen Zahlen über die ganze Welt verbreiteten. Leider ist uns der arabische Text nicht erhalten, ebenso wenig wie die erste lateinische Übersetzung aus der 1. Hälfte des 12. Jh.s, sondern nur eine recht fehlerhafte bruchstückhafte Abschrift dieser Übersetzung aus dem 13. Jh. Eine sehr genaue Vorstellung vom Werk AL-CHARIZMIS bekommen wir aber aus einer Abhandlung des JOHANNES HISPALENSIS (wirkte um 1135 bis 1153), deren ersten Abschnitt er ausdrücklich *liber alghoarismi de practica arismetrice* – »Buch des AL-CHARIZMI über den kundigen Umgang mit der Lehre von den Zahlen« – nennt. Ihm entnehmen wir, dass AL-CHARIZMI sowohl die Stammbrüche der Ägypter wie auch die Sexagesimalbrüche der Babylonier und dazu die gemeinen Brüche der Griechen neben-

* Der Ausdruck geht zurück auf *fractiones vulgares*, womit der französische Astronom und Mathematiker JOHANNES DE LINERIIS (= Lignières bei Amiens; † zwischen 1350 und 1355) sie von den Sexagesimalbrüchen unterschied. – *vulgaris* (lat.) = *allgemein, allen gemein, allbekannt.*

einander verwendet, aber sie alle mithilfe der indischen Ziffern schreibt, und zwar wie die Inder Zähler über dem Nenner und die Ganzen noch drüber. Bis ins 16. Jh. rechnete man dann in Europa so, wie es AL-CHARIZMI vorgemacht hatte.

Zähler und Nenner durch einen waagrechten Strich zu trennen geht in Europa auf LEONARDO VON PISA, genannt FIBONACCI, (um 1170– um 1240) zurück. In seinem *liber abaci** schreibt er 1202:

Cum super quemlibet numerum quedam uirgula protracta fuerit, et super ipsam quilibet alius numerus descriptus fuerit, superior numerus partem uel partes inferioris numeri affirmat; nam inferior denominans, et superior denominatus appellatur.

Wenn über irgendeine Zahl ein Strich gezogen ist und über diesen eine andere Zahl geschrieben ist, dann bezeichnet die obere Zahl den Teil oder die Teile der unteren Zahl; und daher wird die untere Zahl der Nenner und die obere der Zähler genannt.

Abb. 29.1 4-Kopeken-Marke der Post der UdSSR (1983) zum 1200. Jahrestag der Geburt AL-CHARIZMIS

LEONARDO wuchs in der damals wichtigen Handelsstadt Budschaja** auf, wo er in der dort üblichen Kunst der indischen Ziffernschreibweise unterrichtet wurde. Wir dürfen daher annehmen, dass er bei den Arabern auch den Bruchstrich gesehen hat, wie wir ihn bei dem westarabischen Mathematiker AL-HASSAR (12./13. Jh.) finden. Genau wie dieser schreibt LEONARDO bei gemischten Zahlen die Ganzen noch rechts vom Bruch, also in der arabischen Schreibrichtung! Der französische Mathematiker, Ingenieur, Staatswissenschaftler und Bischof NIKOLAUS VON ORESME*** (1320/25 bei Caen–11.7.1382 Lisieux) setzt in seinem *Algorismus proportionum***** (nach 1351, vermutlich vor 1360 geschrieben) schließlich die Ganzen links vom zugehörigen Bruch, wie es unserer Schreibrichtung auch entspricht.

Durchgesetzt hat sich der **Bruchstrich**, der unser ältestes Rechenzeichen ist, nur langsam. Erstaunlicherweise fehlt er in den ältesten gedruckten Rechenbüchern gänzlich, wohl deswegen, weil er drucktechnisch zu kompliziert war. Doch seit dem 1489 gedruckten Rechenbuch des Johannes WIDMANN VON EGER (um 1460–nach 1500) ist er meist vorhanden. Ganz klar gibt 1514 Jakob KÖBEL (1460/65–1533) in seinem *Ain New geordnet Rechenbiechlin* die Anweisung (Moderne Fassung im Lösungsheft):

Du solt mercken / das ayn yeglicher bruch geschriben / unnd außgesprochen virt / durch tzwaierley / tzale und wirt die erst zale oben gesatzt / und hayst der Zäler / dan durch die selb zale wirt gezelt / wie vil man tayl hat uñ wirt under die selb zale übertzwerch ain strichlein gemacht / unnd under das selb strichleyn / die ander

* *liber abaci*, auch *liber abbaci* – »Buch vom Rechenbrett«. Im Mittelalter bezeichnet man aber mit *abacus* ganz allgemein die Rechenkunst.

** 180 km östl. von Algier; frz. Bougie. Von dort bezogen die Franzosen ihre Wachskerzen, und so kam es, dass *die Kerze* im Französischen *la bougie* heißt.

*** gesprochen wie Oräm (ɔˈ rɛ m)

**** *algorismus* ist eine Verballhornung des Namens AL-CHARIZMI, der in Vergessenheit geraten war, sodass man unter *algorismus* die *Lehre vom Rechnen* verstand. Daraus wurde unser Algorithmus. Erst 1849 hat der Orientalist Joseph-Toussaint REINAUD den Ursprung dieses Wortes erkannt.

Du solt mercken / das ayn yeglicher bruch geschriben /
vnnd auß gesprochen virt/durch zwaierley/ zale vnd
wirt die erst zale oben gesatzt/vnd hayst der Zäler/ dan
durch die selb zale wirt gezelt/wie vil man tayl hat vñ
wirt vnder die selb zale übertzwerch ain strichlein ge-
macht/vnnd vnder das selb strichleyn / die ander tzale
geschriben/die selbig tzale hayst der Nenner /wan sie
nendt/was tayl das sein/oder was namens die tayl ha
ben die durch dye öberst tzale/das ist den tzeler getzeldt
worden sein/

Abb. 30.1 Köbels Anweisung zur Bruchschreibweise aus dem Jahre 1514

tzale geschrieben / die selbig tzale hayst der Nenner / wan sie nendt / was tayl das sein / oder was namens die tayl haben die durch dye öberst tzale / das ist den tzeler getzeldt worden sein /

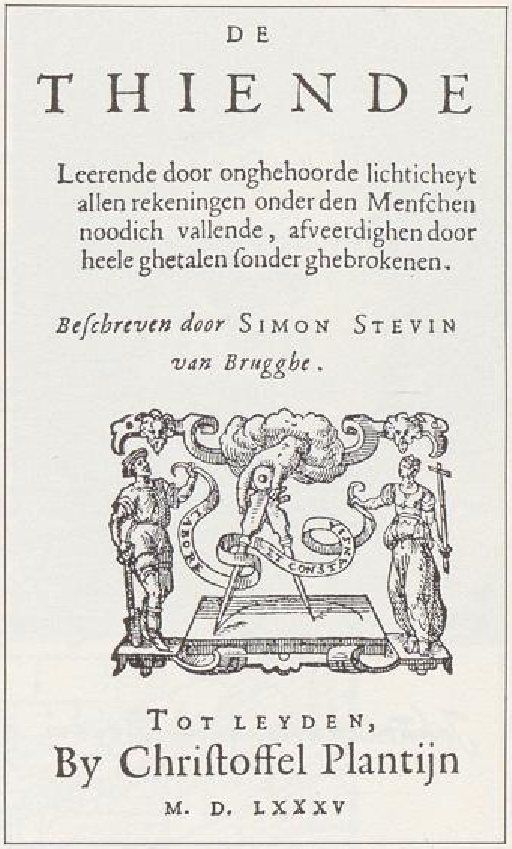
Der schräg stehende Bruchstrich / scheint neueren Datums und aus drucktechnischen Gründen erfunden worden zu sein. Unser Wort *Bruchstrich* ist neueren Datums; bis ins 18. Jh. sagte man kurz *Strich.*

Unsere Fachwörter wie **Bruch**, **Zähler** und **Nenner** gehen auf die lateinischen und späteren deutschen Übersetzungen und Weiterbearbeitungen des *al-Kitab al-hisab al-Hind* des al-Charizmi zurück. Eine kleine tabellarische Übersicht zeigt dir, wie man für die mathematischen Begriffe nach lateinischen Fachwörtern suchte.*

	Johannes Hispalensis	Leonardo von Pisa	Johannes de Lineriis
Bruch	fractio	numerus fractus; ruptus; minutum	minutia; fractio
Nenner	numerus denominationis; denominatio	numerus denominans	denominator
Zähler		numerus denominatus	numerator; numerus numerans; numerus fractionis

Im ausgehenden Mittelalter tauchen dann schließlich die deutschen Ausdrücke auf. So finden wir in der *Geometria Culmensis* (um 1400) *czeler der teyle* und *benumunge der teyle,* was als *Benennung der Teile* noch 1716 im *Mathematischen Lexicon* des Christian von Wolff (1679–1754) erscheint. Der *ruptus* des Leonardo wird im *Algorismus Ratibonensis*, einem vor 1450 in Regensburg entstandenen Text, mit *pruch* übersetzt; die Fachwörter *zeler* und *nenner* werden dort auch verwendet.

* *denominare* = benennen; *fractus* = gebrochen, zerbrochen, geteilt; *minutus* = kleiner gemacht, in kleine Teile zerlegt; *nominare* = nennen, benennen; *numerus* = Zahl; *ruptus* = gebrochen, zerbrochen, zerteilt



DE

THIENDE

Leerende door onghehoorde lichticheyt allen rekeningen onder den Menſchen noodich vallende, afveerdighen door heele ghetalen ſonder ghebrokenen.

Beſchreven door SIMON STEVIN *van Brugghe*.

TOT LEYDEN,

By Chriſtoffel Plantijn

M. D. LXXXV

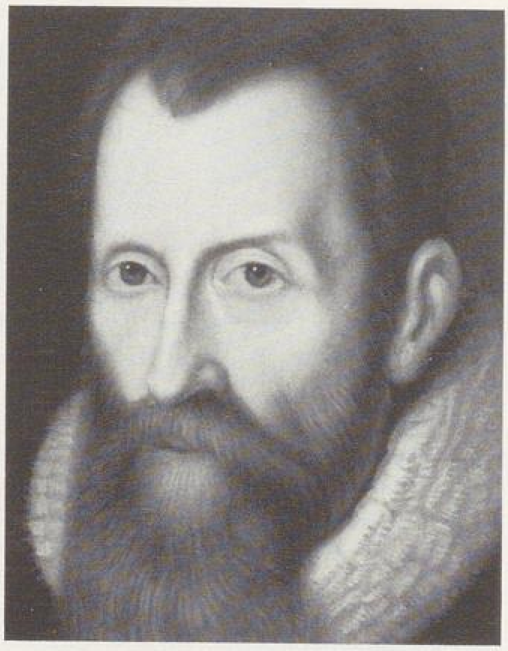
Abb. 31.1 Simon STEVIN [i betont] (1548 Brügge – zwischen 20.2. und 8.4.1620 Leiden) niederländischer Mathematiker und Ingenieur. Anfänglich in der Finanzverwaltung tätig, ab 1593 Berater des Prinzen MORITZ von Oranien.

Abb. 31.2 Titelblatt von Simon STEVINS De Thiende von 1585*. – Titelblätter gibt es erst seit Beginn des 16. Jh.s. Das erste vollständige Titelblatt druckte Wolfgang STÖCKEL 1500 in Leipzig.

Wie oben schon angedeutet, blieb es dem Abendland vorbehalten, das indische dezimale Stellenwertsystem auf die Bruchrechnung auszudehnen und das babylonische Sexagesimalsystem aus dem praktischen Rechnen zu verdrängen. Anfänge eines dezimalen Bruchrechnens mit Zehnteln, Hundertsteln usw. finden sich zwar bereits im *Chiu Chang Suan Shu* aus dem Beginn der Han-Zeit (202 v. Chr. – 9 n. Chr.) und bei AL-CHARIZMI und einigen anderen arabischen Mathematikern.
Ganz nahe an die heutigen Dezimalbrüche kam 1579 François VIÈTE (1540–1603) in seinem *Canon mathematicus***, in dem er die Dezimalteile durch Kleindruck von den Ganzen abhob, z.B. 653, 638, 057, 33, oder gar als zusätzliches Trennungszeichen einen senkrechten Strich setzte wie bei 86, 602 | 540, 37. (Das Komma dient nur zur Einteilung in Dreiergruppen.)

* Der Zehent, welcher lehrt, mit unerhörter Leichtigkeit alle Rechnungen, die unter den Menschen nötig werden, durch ganze Zahlen ohne Brüche zu erledigen. Beschrieben von SIMON STEVIN aus Brügge. Zu Leyden/Bei Christoffel Plantijn M.D.LXXXV – Das Motto lautet: Durch Arbeit und Beständigkeit.

** ὁ κανών = der gerade Stab, das Richtscheit, die Regel



1616

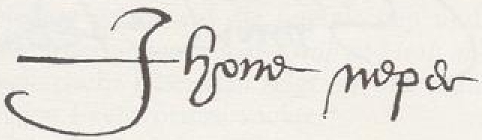


Abb. 32.1 Johann Hartmann BEYER (1563 Frankfurt/Main – 1625 Frankfurt/Main) Rechenmeister, Arzt, Ratsherr und Schöffe der Stadt Frankfurt am Main

Abb. 32.2 John NAPIER, auch NEPER, Laird [= Gutsherr] of Merchiston (1550 Merchiston Castle bei Edinburgh bis 4.4.1617 ebd.)

Als Erster hat jedoch erst 1585 Simon STEVIN (1548–1620) in seinem Werk *De Thiende* – »Der Zehent« – Dezimalbrüche exakt definiert und die Rechengesetze für sie aus den Gesetzen des Bruchrechnens hergeleitet. Ab 1630 sind Dezimalbrüche dann in allen einschlägigen Lehrbüchern zu finden. Die Ausdrücke **Dezimalbruch** und **Dezimalrechnung** gehen auf die *Logistica decimalis: Das ist Kunstrechnung der Zehentheyligen Brüchen** (1603) des Rechenmeisters Johann Hartmann BEYER (1563–1625) zurück. Dessen und auch STEVINS Schreibweise waren viel zu kompliziert. Schrieb letzterer doch für 8,937 noch 8⓪9①3②7③. Erst die Einführung des Kommas als Trennzeichen durch den schottischen Mathematiker John NAPIER**, auch NEPER, (1550–1617) in seiner *Rabdologia**** (1617) brachte die heutige Darstellungsweise.

* ἡ λογιστική = die Rechenkunst; *decimus* (lat.) = der zehnte

** gesprochen ˈneɪpiə

*** Lehre von den Rechenstäbchen. – ῥάβδος (rhábdos) = Stab