



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

2 Rechnen mit Bruchtermen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83513](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83513)

2 Rechnen mit Bruchtermen

Ein New geordnet Rech
en buechlin auf den linien
mit Rechen pfeninggen: Den
Jungen angenden zu heis
lichem gebrauch vnd hend
eln leychtlich zu lernen
mit figuren vnd exempel
Volgethernach klär
lichen angezaigt.



Titelblatt des Augsburger Raubdrucks (1514) des *Rechenbüchleins* von Jakob KÖBEL (1460/65–1533), das 1514 in Oppenheim erschienen war. Rechenbücher sind die ersten volkstümlichen Druckschriften, die im 16. Jh. in allen Ländern erscheinen. Das älteste, mit Einzelbuchstaben gesetzte Rechenbuch ist der um 1475 in Trient gedruckte in bairischem späten Mittelhochdeutsch geschriebene *Algorismus*.

2 Rechnen mit Bruchtermen

2.1 Addieren und Subtrahieren gleichnamiger Bruchterme

Vom Rechnen mit Zahlen kennen wir die Regel, dass gleichnamige Brüche addiert bzw. subtrahiert werden, indem man ihre Zähler addiert bzw. subtrahiert und den Nenner beibehält. So ist z. B.

$$\frac{3}{7} + \frac{5}{7} = \frac{3+5}{7} = \frac{8}{7} \quad \text{bzw.} \quad \frac{3}{7} - \frac{5}{7} = \frac{3-5}{7} = \frac{-2}{7} = -\frac{2}{7}.$$

Aus diesem Grunde ergeben die Terme $\frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ und $\frac{a+b}{c}$ bei jeder Einsetzung den gleichen Zahlenwert. Also sind sie äquivalent. Damit wissen wir, wie man gleichnamige Bruchterme addiert:

Satz 34.1: Gleichnamige Bruchterme werden addiert, indem man die Zähler addiert und den Nenner beibehält; kurz:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{4a^2 - 6ab}{4a^2 - b^2} + \frac{b^2 + 2ab}{4a^2 - b^2} &= \frac{(4a^2 - 6ab) + (b^2 + 2ab)}{4a^2 - b^2} = \\ &= \frac{4a^2 - 4ab + b^2}{4a^2 - b^2} = \\ &= \frac{(2a - b)^2}{(2a - b)(2a + b)} = \\ &= \frac{2a - b}{2a + b}. \end{aligned}$$

Auch bei der Subtraktion gleichnamiger Bruchterme ergeben die Terme $\frac{a}{c} - \frac{b}{c}$ und $\frac{a-b}{c}$ nach dem obigen bei jeder Einsetzung den gleichen Zahlenwert. Sie sind also äquivalent und es gilt

Satz 34.2: Gleichnamige Bruchterme werden voneinander subtrahiert, indem man die Zähler voneinander subtrahiert und den Nenner beibehält; kurz

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Beachte: Da der Bruchstrich eine Klammer ersetzt, muss der Zähler des Minuenden, falls er ein Aggregat ist, *unbedingt* in eine Klammer gesetzt werden, wenn die beiden Zähler auf den gemeinsamen Bruchstrich kommen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 6}{x^2 + x} - \frac{x^2 - 4x - 8}{x^2 + x} &= \frac{(3x^2 - 6) - (x^2 - 4x - 8)}{x^2 + x} = \\ &= \frac{3x^2 - 6 - x^2 + 4x + 8}{x^2 + x} = \\ &= \frac{2x^2 + 4x + 2}{x^2 + x} = \\ &= \frac{2(x^2 + 2x + 1)}{x^2 + x} = \\ &= \frac{2(x + 1)^2}{x(x + 1)} = \\ &= \frac{2(x + 1)}{x}. \end{aligned}$$

Sind mehr als zwei Bruchterme durch Plus- und Minuszeichen miteinander verknüpft, so erhält man ein Aggregat von Bruchtermen, für das die dir bekannten Regeln über das Rechnen mit Aggregaten gelten. Speziell für Aggregate aus gleichnamigen Bruchtermen gilt

Satz 35.1: Ein Aggregat von gleichnamigen Bruchtermen wird berechnet, indem man den Nenner beibehält und in den Zähler das entsprechende Aggregat aus den Zählern der einzelnen Glieder setzt.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{3r + s}{r^2 - s^2} - \frac{7 - 2r}{r^2 - s^2} + \frac{4s + 7}{r^2 - s^2} &= \frac{(3r + s) - (7 - 2r) + (4s + 7)}{r^2 - s^2} = \\ &= \frac{3r + s - 7 + 2r + 4s + 7}{r^2 - s^2} = \\ &= \frac{5r + 5s}{r^2 - s^2} = \\ &= \frac{5(r + s)}{(r + s)(r - s)} = \\ &= \frac{5}{r - s}. \end{aligned}$$

Aufgaben

$$1. a) \frac{7a}{5x} + \frac{9a}{5x} - \frac{6a}{5x} \quad b) \frac{13a}{7b} - \frac{17a}{7b} + \frac{19a}{7b} - \frac{11a}{7b}$$

$$c) \frac{2a-3b}{5} + \frac{5a-6b}{5} - \frac{4b-3a}{5} - \frac{2b}{5}$$

$$d) \frac{7x-9y}{18} - \frac{12x-13y}{18} - \frac{14x+15y}{18} + \frac{x-7y}{18}$$

$$e) \frac{5m-6n}{13} + \frac{8n-9m}{13} - \frac{7n-6m}{13} + \frac{5n-2m}{13}$$

$$f) \frac{2a^2+3ab}{a+b} - \frac{3a^2+2ab}{a+b} - \frac{a^2+3b^2}{a+b} + \frac{5a^2+ab+2b^2}{a+b}$$

$$g) \frac{x^2+4xy+y^2}{x-y} - \frac{3xy-2x^2+4y^2}{x-y} - \frac{2y^2+2x^2-3xy}{x-y}$$

$$h) \frac{5a^2+2ab-3b^2}{a^2-b^2} - \frac{3a^2-5ab+b^2}{a^2-b^2} + \frac{a^2-ab+7b^2}{a^2-b^2}$$

$$i) \frac{2x^2-4xy+5y^2}{x^2-y^2} - \frac{7xy-4x^2+3y^2}{x^2-y^2} - \frac{5x^2-9xy+y^2}{x^2-y^2}$$

$$2. a) \frac{(a+b)^2}{2ab} - \frac{(a-b)^2}{2ab}$$

$$b) \frac{(3p-2q)^2}{2pq} - \frac{(5p+3q)^2}{2pq} - \frac{(5q-4p)(4p-q)}{2pq}$$

$$c) \frac{(5r-8s)^2}{12rs} - \frac{(3r+10s)^2}{12rs} + \frac{(4r+6s)^2}{12rs}$$

$$d) \frac{(7a-8b)(5a+2b)}{4a-5b} - \frac{(2a-b)(5a-4b)}{4a-5b} - \frac{(9a+b)(a+5b)-59ab}{4a-5b}$$

$$e) \frac{(5x+4y)(2x-3y)}{x^2-4y^2} - \frac{(4x-3y)^2}{x^2-4y^2} - \frac{(2x-5y)(2x+5y)}{x^2-4y^2} + \frac{11x^2-13xy}{x^2-4y^2}$$

$$3. a) \frac{(6a-5b)^2}{7+3b} - \frac{15ab-11b^2}{7a+3b} + \frac{(4a-3b)(a+17b)}{7a+3b} + \frac{9a^2+10ab+6b^2}{7a+3b}$$

$$\text{b) } \frac{(2x-3y)^2}{3x-8y} - \frac{(5x+7y)(3x-y)}{3x-8y} + \frac{(4x-3y)(5x-9y)}{3x-8y} + \frac{21y^2+31xy}{3x-8y}$$

$$\text{c) } \frac{(u+4v)^2}{5u-6v} + \frac{(2u-5v)^2}{5u-6v} - \frac{(2u-7v)(3v-5u)}{5u-6v} - \frac{110v^2-75uv}{5u-6v}$$

$$\text{d) } \frac{(4r-3s)^2}{4r-7s} - \frac{(2r-7s)(3s-8r)}{4r-7s} + \frac{9s(2r-s)}{4r-7s}$$

$$\text{4. a) } \frac{(x+1)(x+2)(x-1)}{x-3} - \frac{2(x+2)(x+1)(x-2)}{x-3} + \frac{x^3-6x-9}{x-3}$$

$$\text{b) } \frac{(a+5)(a+3)(a-2)}{2a+3} - \frac{(a-3)^2(a+4)}{2a+3} - \frac{(a+2)^3 - a^2(a-2) - 71}{2a+3}$$

$$\text{c) } \frac{(3x+4y)(2x-y)(2x+3y)}{6y^2} - \frac{(x+3y)(3x-2y)(2x+y)}{6y^2} - \frac{x^2(6x+11y)}{6y^2}$$

$$\text{d) } \frac{(2p-3q)(p-4q)(4p-5q)}{3pq} + \frac{(4p-3q)(5p-2q)(p+10q)}{3pq} - \frac{4p(5q^2+7p^2)}{3pq}$$

2.2 Addieren und Subtrahieren ungleichnamiger Bruchterme

Genauso wie bei Zahlen kann man ungleichnamige Bruchterme addieren bzw. subtrahieren, nachdem man sie mithilfe des Hauptnenners gleichnamig gemacht hat. Wir merken uns

Satz 37.1: Ungleichnamige Bruchterme werden addiert bzw. subtrahiert, indem man sie gleichnamig macht und dann die Sätze für gleichnamige Bruchterme anwendet. Ebenso stellt man aus einem Aggregat ungleichnamiger Bruchterme zuerst ein Aggregat gleichnamiger Bruchterme her und berechnet dann dieses.

Beispiele:

$$\text{1) } \frac{a+2b}{a^2+2ab+b^2} - \frac{2}{3a+3b}$$

Wir bilden unter Angabe der Erweiterungsfaktoren EF den Hauptnenner HN:

$$\begin{array}{rcl} a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 & \parallel & \text{EF} \\ 3a + 3b = 3(a+b) & \parallel & 3 \\ & \parallel & (a+b) \end{array}$$

$$\text{HN} = 3(a+b)^2$$

$$\begin{aligned} \text{Also } \frac{a+2b}{a^2+2ab+b^2} - \frac{2}{3a+3b} &= \frac{3(a+2b)}{3(a+b)^2} - \frac{2(a+b)}{3(a+b)^2} = \\ &= \frac{3(a+2b) - 2(a+b)}{3(a+b)^2} = \\ &= \frac{3a+6b-2a-2b}{3(a+b)^2} = \\ &= \frac{a+4b}{3(a+b)^2}. \end{aligned}$$

$$2) \frac{1}{2x^3+4x^2} + \frac{2}{15-3x} - \frac{15-19x-8x^2}{12x^3-36x^2-120x}$$

Wir bilden durch Faktorisieren den Hauptnenner und multiplizieren die Erweiterungsfaktoren EF so weit wie möglich aus:

$$\begin{array}{rcl} 2x^3 + 4x^2 = 2x^2(x+2) & \parallel & \text{EF} \\ 15 - 3x = 3(5-x) & \parallel & 2 \cdot 3(x-5) = 6x-30 \\ 12x^3 - 36x^2 - 120x = 12x(x^2-3x-10) = & \parallel & -2^2 x^2(x+2) = -4x^3-8x^2 \\ & \parallel & = 2^2 \cdot 3x(x+2)(x-5) \end{array}$$

$$\text{HN} = 2^2 \cdot 3 \cdot x^2(x+2)(x-5)$$

Beim Zusammenfassen der gleichnamig gemachten Brüche ersparen wir uns viel Schreibarbeit, wenn wir für den Hauptnennerterm, solange wir nur im Zähler rechnen, einfach kurz HN schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x^3+4x^2} + \frac{2}{15-3x} - \frac{15-19x-8x^2}{12x^3-36x^2-120x} &= \\ &= \frac{1 \cdot (6x-30) + 2 \cdot (-4x^3-8x^2) - (15-19x-8x^2) \cdot x}{\text{HN}} = \\ &= \frac{6x-30-8x^3-16x^2-15x+19x^2+8x^3}{\text{HN}} = \\ &= \frac{3x^2-9x-30}{\text{HN}} = \frac{3(x^2-3x-10)}{2^2 \cdot 3 \cdot x^2(x+2)(x-5)} = \\ &= \frac{(x+2)(x-5)}{2^2 \cdot x^2(x+2)(x-5)} = \frac{1}{4x^2}. \end{aligned}$$

Nun weißt du, wie du Aggregate aus Bruchtermen berechnen kannst. Was machst du aber mit dem Term $3x + \frac{6x}{7x-2}$? Wir erinnern uns, dass man jede Zahl als Bruch mit dem Nenner 1 schreiben kann, z. B. $5 = \frac{5}{1}$. Genauso kann man jeden Nicht-Bruchterm als Bruchterm mit dem Nenner 1 schreiben. Machen wir's!

$$\begin{aligned} 3x + \frac{6x}{7x-2} &= \frac{3x}{1} + \frac{6x}{7x-2} = \frac{3x(7x-2) + 6x \cdot 1}{7x-2} = \\ &= \frac{21x^2 - 6x + 6x}{7x-2} = \frac{21x^2}{7x-2} \end{aligned}$$

Aufgaben

1. a) $\frac{a}{10} + \frac{2a}{5}$ b) $\frac{5p}{9} - \frac{3p}{4}$ c) $\frac{a}{5} - \frac{b}{3}$ d) $\frac{3p}{14} + \frac{11q}{21}$
2. a) $\frac{7}{a} + \frac{3}{b}$ b) $\frac{6}{a} - \frac{2}{3a}$ c) $\frac{11}{8m} + \frac{3}{4n}$ d) $\frac{-1}{7z} + \frac{27}{196z}$
3. a) $\frac{6n}{7m} - \frac{5}{4m}$ b) $\frac{11u}{13vw} - \frac{8u}{3vw}$ c) $\frac{7b}{a^2} + \frac{3}{b}$ d) $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$
4. a) $\frac{b^2+1}{3a^2} + \frac{a}{6b}$ b) $\frac{4a+b}{16a^2b} + \frac{a-3b}{12ab^2}$
 c) $\frac{7y-1}{x^2} - \frac{1}{4x^4}$ d) $\frac{2m+1}{4m^2n} - \frac{3n^2-m}{6mn^3}$
5. a) $1 + \frac{a}{b}$ b) $a - \frac{b}{a}$ c) $\frac{1}{x^2} - x$ d) $\frac{w^2}{u^2v} + v$
6. a) $\frac{a^2+b^2}{ab} + 2$ b) $\frac{c^2+d^2}{cd} - 2$ c) $\frac{(m+n)^2}{4mn} - 1$ d) $\frac{(x-y)^2}{4} + xy$
7. a) $\frac{(a+b)^2}{a-b} - (a-b)$ b) $\frac{(x-y)^2}{x+y} + (x+y)$ c) $\frac{(u+v)^2}{u-v} + (u+v)$
8. a) $\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a-b}$ b) $\frac{3a}{4a-1} - \frac{2b+1}{3b}$ c) $\frac{3x-1}{2x^2-xy} - \frac{3y-2}{2xy-y^2}$
9. a) $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}$ b) $\frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y}$
 c) $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}$ d) $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}$
10. a) $\frac{3a+5b}{2a+3b} - \frac{2a-3b}{3a-5b}$ b) $\frac{4u-7v}{6u-v} + \frac{6u+v}{4u+7v}$

$$11. \text{ a) } \frac{4a-5b}{6a+7b} - \frac{5b+4a}{6a-7b}$$

$$\text{b) } \frac{2a(a-b)}{a^2-2ab+b^2} - \frac{a+b}{a-b}$$

$$12. \text{ a) } \frac{2a}{9} - \frac{b}{9} + \frac{4c}{9}$$

$$\text{b) } \frac{-7m}{23} + \frac{3n}{-23} - \frac{8m-n}{23}$$

$$\text{c) } \frac{5p}{18} + \frac{-3q}{45} + \frac{4}{21}$$

$$\text{d) } \frac{a-b}{16} - \frac{2a+b}{36} + \frac{-a+b}{-24}$$

$$13. \text{ a) } \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{a+b}{ab}$$

$$\text{b) } \frac{m-2}{2m} + \frac{1}{3mn} + \frac{3n+2}{-6n}$$

$$\text{c) } \frac{a^2+3b}{a^2b} + \frac{1-3a}{3ab} - \frac{5b-3}{5b^2}$$

$$\text{d) } \frac{3x-1}{7x^3y} - \frac{x^2+y}{2x^2y^2} + \frac{y^2-1}{3y^4}$$

$$14. \text{ a) } \frac{4x-3y}{a+b} - \frac{6x-5y}{2a+2b} + \frac{2y-3x}{3a+3b}$$

$$\text{b) } \frac{3z-1}{15a-9} + \frac{1-4z}{20a-12} + \frac{-3}{21-35a}$$

$$\bullet 15. \text{ a) } \frac{4p-7q}{7m-4n} + \frac{p+5q}{-7m-4n} - \frac{3p+q}{7m+4n}$$

$$\text{b) } \frac{3a-b}{x-2y} - \frac{4a+b}{2y-x} + \frac{2a-b}{2x-y}$$

$$\bullet 16. \text{ a) } \frac{1}{4p-7q} + \frac{49q}{21pq-12p^2} - \frac{8p+3q}{12pq-21q^2}$$

$$\text{b) } \frac{3}{32yz^2+28y^2} - \frac{4}{-24z^3-21yz} - \frac{y^2+z^2}{8y^2z^3+7y^3z}$$

$$17. \text{ a) } \frac{4a+1}{4a+7} - \frac{7}{16a^2-49}$$

$$\text{b) } \frac{x}{45x^2-5} + \frac{3x+1}{3x-1}$$

$$18. \text{ a) } \frac{x+b}{a^2-b^2} - \frac{x+b}{a^2-ab}$$

$$\bullet \text{ b) } \frac{5m+2n}{125m^2-20n^2} - \frac{4m-5n}{16m^2-20mn}$$

$$19. \text{ a) } \frac{3}{24x-4} - \frac{6x-1,25}{36x^2-12x+1}$$

$$\text{b) } \frac{z+4}{8+40z+50z^2} + \frac{1}{-22-55z}$$

$$20. \text{ a) } \frac{-13x}{y^2-26yz+169z^2} + \frac{13x}{169z^2-13yz}$$

$$\text{b) } \frac{3a-b}{243a^2-3b^2} + \frac{b-3a}{27ab-3b^2}$$

$$21. \text{ a) } \frac{5s+7}{t^2-4t+4} - \frac{6s-7}{4-t^2}$$

$$\text{b) } \frac{5r+12s}{4r^2-64s^2} - \frac{r-4s}{-r^2-8rs-16s^2}$$

$$22. \text{ a) } \frac{x}{2x-6} - \frac{x^2}{x^2-4x+3}$$

$$\text{b) } \frac{y}{2y^2+4y-6} + \frac{1}{y-1}$$

$$23. \text{ a) } \frac{2a^2-a+21}{12a^2-27} + \frac{2a-7}{6a-9} - 1$$

$$\text{b) } \frac{m^2}{m^2-4n^2} - \frac{7m+4n}{10m+20n} + \frac{1}{5}$$

$$24. \text{ a) } 5 - \frac{5x+9}{x+2} + \frac{8}{x^4-16}$$

$$\text{b) } \frac{16y^4+60y+9}{16y^4-81} + \frac{5}{4y^2+9} - 1$$

$$25. \text{ a) } \frac{a^2}{16a^2 + 40ab + 25b^2} - \frac{31a^2 - 50b^2}{16a^2 - 25b^2} + 2$$

$$\text{ b) } \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2} + \frac{a^2 - 2ab - b^2}{ab} + \frac{a^2 - ab + b^2}{b^2} - 2$$

$$26. \text{ a) } \frac{1}{a} - \frac{2}{b} - \frac{5a - 12b}{a^2 - 4ab + 4b^2}$$

$$\text{ b) } \frac{1}{2x} + \frac{2x - 3y}{4x^2 + 12xy + 9y^2} - \frac{1}{3y}$$

$$27. \text{ a) } \frac{m-1}{m^2} - \frac{4}{6m-4} + \frac{15m}{4-9m^2}$$

$$\text{ b) } \frac{u+5v}{uv} - \frac{10u}{u^2 - 25v^2} + \frac{5}{u-5v}$$

$$28. \text{ a) } \frac{8x^2 - 0,5a}{2x^2 - ax} - \frac{7x + 0,5a - 1}{2x - a} + \frac{x-1}{2x}$$

$$\text{ b) } \frac{6m^2 + 9}{7m^3 - 63m} + \frac{m}{9 - m^2} + \frac{1}{7m}$$

$$29. \text{ a) } \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2+b} - \frac{b^2}{4-b^2}$$

$$\text{ b) } \frac{x-a}{5x+3} - \frac{x+a}{5x-3} + \frac{(4a+6)x}{25x^2-9}$$

$$30. \text{ a) } \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

$$\text{ b) } \frac{2a-3b}{2a+3b} - \frac{2a+3b}{2a-3b} + \frac{8a^2+18b^2}{4a^2-9b^2}$$

$$\text{ c) } \frac{3p+4q}{3p-4q} + \frac{3p-4q}{3p+4q} - \frac{48pq}{9p^2-16q^2}$$

$$\text{ d) } \frac{2(4a-b)}{4a+b} - \frac{3(4a+b)}{4a-b} + \frac{32a^2+32ab+2b^2}{16a^2-b^2}$$

$$\text{ e) } \frac{5(2x-3y)}{4x-5y} - \frac{4(2x+3y)}{4x+5y} - \frac{4x^2-25xy}{16x^2-25y^2}$$

$$\text{ f) } \frac{-3a+4}{4a-32} - \frac{2a-1}{6a+48} - \frac{64-64a-26a^2}{24a^2-1536}$$

$$31. \text{ a) } \frac{2(3m+4n)}{6m+9n} - \frac{2,5m-n}{10m-15n} - \frac{3m^2-1,5mn-7n^2}{4m^2-9n^2}$$

$$\text{ b) } \frac{a}{(a+b)^2} - \frac{b}{(a-b)^2} + \frac{2b}{a^2-b^2} - \frac{1}{a+b} + \frac{a^3-3a^2b+3ab^2+3b^3}{(a^2-b^2)^2}$$

$$\text{ c) } \frac{a}{a+b-c} - \frac{b}{a-b+c} + \frac{2ab-c(a+b)}{a^2-(b-c)^2}$$

$$32. \text{ a) } \frac{6x+1}{4x-6} + \frac{8x-3}{6x+9} - \frac{20x^2-4x+9}{8x^2-18}$$

$$\text{ b) } \frac{4-5y}{4+5y} + \frac{4+5y}{5y-4} - \frac{12-145y}{32-50y^2}$$

$$\bullet 33. \text{ a) } \frac{12a+5b}{0,9a+0,6b} + \frac{9a+4b}{0,6a+0,4b} - \frac{2(27a^2+33ab-4b^2)}{2,7a^2-1,2b^2}$$

$$\text{ b) } \frac{3a^2+6ab}{15a-20b} - \frac{ab}{3a-4b} - \frac{5ab-4b^2}{6a-8b} - \frac{5a-14b}{30}$$

$$34. \text{ a) } \frac{3a-b}{3x-6y} + \frac{4a-b}{-4x+8y} + \frac{b(x+y)}{2x^2-8y^2}$$

$$\text{b) } \frac{3z}{6u+12v} - \frac{y+2z}{4u+8v} + \frac{y}{(2u+4v)^2}$$

$$35. \text{ a) } \frac{22x^2-27x-49}{735-15x^2} - \frac{-2x+4}{3x-21} + \frac{4x-1}{5x+35}$$

$$\text{b) } \frac{2a-3b}{4a^2+2ab} - \frac{6a+4b}{6ab+3b^2} + \frac{5a+8b}{6ab} - \frac{8a-b}{8a^2+4ab}$$

$$36. \text{ a) } \frac{a^4+1}{a^4-1} + \frac{a^2+1}{a^2-1} - \frac{a+1}{a-1} \quad \text{b) } \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x}$$

$$\bullet 37. \text{ a) } \frac{3ab}{9a^2-b^2} + \frac{a+b}{2b-6a} + \frac{3a^2-4ab-b^2}{18a^2-2b^2}$$

$$\text{b) } \frac{3a-5b}{6a^2-9ab} - \frac{2a+7b}{4ab+6b^2} - \frac{5ab-15b^2}{12a^3-27ab^2} + \frac{4a^2-23b^2}{8a^2b-18b^3}$$

$$\bullet 38. \text{ a) } \frac{-2x+3}{3x+9} - \frac{11x^2+51x-54}{6x^2-54} - \frac{11x-12}{x^2-9}$$

$$\text{b) } \frac{7x+2y}{6xy-2y^2} - \frac{3x-4y}{9x^2+3xy} - \frac{6x^2-4y^2}{27x^3-3xy^2} - \frac{6x^2+7y^2}{9x^2y-y^3}$$

$$39. \text{ a) } \frac{2}{x+1} - \frac{x-3}{x^2-1} - \frac{x}{x^2-2x+1} \quad \text{b) } \frac{1}{3y-2z} - \frac{24y}{36y^2-16z^2} + \frac{2z}{(3y+2z)^2}$$

$$\bullet 40. \text{ a) } \frac{1}{3a-4b} + \frac{2a-b}{-9a^2+24ab-16b^2} - \frac{a-3b}{9a^2+24ab+16b^2}$$

$$\text{b) } \frac{4a^2}{6ab+9b^2} - \frac{2a}{3b} + \frac{3b}{2a} - \frac{9b^2}{4a^2+6ab}$$

$$\bullet 41. \text{ a) } \frac{m}{2n} + \frac{m^2}{m^2-2mn+n^2} - \frac{m(m^2+n^2)}{2m^2n-4mn^2+2n^3}$$

$$\text{b) } \frac{4a^2}{10ab-25b^2} + \frac{25b^2}{4a^2-10ab} - \frac{2a}{5b} + \frac{5b}{2a}$$

$$\bullet 42. \frac{x-y}{3ax-2by+3ay-2bx} + \frac{1}{3a-2b} - \frac{x}{x^2-y^2}$$

$$\bullet 43. \frac{ax-a}{2ax+2x-a-1} + \frac{2ax^2+ax}{4ax^2+4x^2-a-1} - 1$$

$$\bullet 44. \frac{2a-3b}{6ab} + \frac{3}{4a-6b} - \frac{2b}{6a^2-9ab} - \frac{3a}{8ab-12b^2} + \frac{5a^2+6ab-19b^2}{24a^2b-36ab^2}$$

$$45. \frac{2}{x^2-1} - \frac{3}{x^2+x-2} + \frac{1}{x^2+3x+2}$$

$$46. \frac{1}{x^2-6x+9} + \frac{1}{x^2+8x+16} - \frac{2}{x^2+x-12}$$

$$\bullet 47. \frac{x^2+y^2}{2xy} - \frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y} + \frac{y^4-x^4+4x^3y}{2(x^3y-xy^3)}$$

$$\bullet 48. \frac{p}{p-q} - \frac{q^2}{p^2+pq+q^2} - \frac{p^2q}{p^3-q^3} \quad \bullet 49. \frac{1}{x+y} + \frac{x-y}{x^2-xy+y^2} - \frac{x(x-y)}{x^3+y^3}$$

$$\bullet 50. \frac{5}{4x^2-4x+1} - \frac{2}{4x^2+4x+1} + \frac{4x^2-28x-7}{16x^4-8x^2+1}$$

$$\bullet 51. \frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} + \frac{a-b}{a^2+2ab+b^2} - \frac{2a-b}{a^2-b^2} - \frac{4(ab^2-b^3)}{(a^2-b^2)^2}$$

$$\bullet 52. \frac{x^2}{4x^2-4xy+y^2} - \frac{y^2}{4x^2+4xy+y^2} - \frac{x^2+y^2}{4x^2-y^2} + \frac{xy(6xy-5y^2)}{(4x^2-y^2)^2}$$

$$\bullet 53. \frac{7a^2-4b^2}{a^2+6ab+9b^2} - \frac{5a^2-9ab}{a^2-6ab+9b^2} - \frac{2a^2-3ab+4b^2}{a^2-9b^2} + \frac{462ab^3-82a^2b^2}{a^4-18a^2b^2+81b^4}$$

$$\bullet 54. \frac{2a-3b}{a^2+2ab+b^2} - \frac{2a+3b}{a^2-2ab+b^2} + \frac{10a^3+10a^2b}{a^4-2a^2b^2+b^4} - \frac{6b}{a^2-b^2}$$

$$\bullet 55. \frac{2x-1}{4x^2+4x+1} - \frac{2x+1}{4x^2-4x+1} + \frac{4x^2+7}{16x^4-8x^2+1}$$

$$\bullet 56. \frac{a}{a^2+3ab+2b^2} + \frac{b}{a^2+4ab+3b^2} - \frac{a+b}{a^2+5ab+6b^2}$$

$$\bullet 57. \text{ a) } \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

$$\text{ b) } \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

$$\text{ c) } \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$\text{ d) } \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

2.3 Multiplizieren von Bruchtermen

Vom Rechnen mit Zahlen kennen wir die Regel, dass Brüche miteinander multipliziert werden, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert. So ist z. B. $\frac{3}{7} \cdot \frac{8}{13} = \frac{3 \cdot 8}{7 \cdot 13} = \frac{24}{91}$.

Aus diesem Grund ergeben die Terme $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ und $\frac{ac}{bd}$ bei jeder Einsetzung denselben Zahlenwert. Also sind sie äquivalent. Damit wissen wir, wie man Bruchterme miteinander multipliziert:

Satz 44.1: Bruchterme werden miteinander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert; kurz:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Beachte: 1) Produkte sind meist bequemer zu verarbeiten als Summen, deshalb multiplizieren wir nicht aus, sondern versuchen im Gegenteil so weit wie möglich zu faktorisieren, um gegebenenfalls kürzen zu können.

Übrigbleibende Zahlenfaktoren multiplizieren wir aus.

2) Vergiss die Klammern nicht, wenn du *einen* Bruchstrich machst.

Beispiel:

$$\begin{aligned} & \frac{10x^2 - 60x + 90}{x^2 - 4} \cdot \frac{4x^2 + 4x - 8}{5x - 15} = \\ &= \frac{10(x^2 - 6x + 9) \cdot 4(x^2 + x - 2)}{(x^2 - 4) \cdot 5(x - 3)} = \frac{10 \cdot 4(x - 3)^2(x + 2)(x - 1)}{5(x - 2)(x + 2)(x - 3)} = \\ &= \frac{2 \cdot 4(x - 3)(x - 1)}{x - 2} = \frac{8(x - 3)(x - 1)}{x - 2}. \end{aligned}$$

Nun weißt du, wie du Bruchterme miteinander multiplizieren kannst.

Was machst du aber mit dem Produkt $12x \cdot \frac{1+x}{6x^2-18x}$?

Wir schreiben $12x$ als Bruchterm $\frac{12x}{1}$ und wenden Satz 44.1 an:

$$12x \cdot \frac{1+x}{6x^2-18x} = \frac{12x}{1} \cdot \frac{1+x}{6x^2-18x} = \frac{12x(1+x)}{1 \cdot (6x^2-18x)} = \frac{12x(1+x)}{6x(x-3)} = \frac{2(x+1)}{x-3}$$

Es gilt also

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$$

Aufgaben

1. a) $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$ b) $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}$ c) $\frac{7p}{3q} \cdot \frac{2p}{5q}$ d) $\frac{7p}{3q} \cdot \frac{2q}{5p}$
2. a) $\frac{64k}{25l} \cdot \frac{125}{128k}$ b) $\frac{121b}{91a} \cdot \frac{169c}{156d}$ c) $\frac{13x}{70yz} \cdot \frac{35y}{52x^2}$ d) $\frac{98m^2n}{39} \cdot \frac{65m}{147n^3}$
3. a) $\left(\frac{7ax}{13by}\right)^2$ b) $\frac{11m}{15n} \cdot \left(\frac{15n}{11m}\right)^2$ c) $\frac{(u^2v)^2}{w} \cdot \frac{w^2}{(uv)^3}$ d) $\frac{4ac}{3b^3d^2} \cdot \frac{(3ab^2d^2)^2}{10c^3}$
4. a) $\frac{5a}{3b} \cdot 7c$ b) $3mn \cdot \frac{14m}{11n}$ c) $16xy \cdot \frac{5y}{12}$ d) $\frac{13u^2}{12v^2} \cdot 4v^3$
5. a) $\frac{1}{a+b} \cdot (b+a)$ b) $(2p-q) \cdot \frac{2}{q-2p}$
- c) $\frac{5x}{3x-6y} \cdot (4x-8y)$ d) $(7ab-3b^2) \cdot \frac{b}{6b-14a}$
6. a) $\frac{a-b}{a+b} \cdot (a^2-b^2)$ b) $(a^2-b^2) \cdot \frac{a+b}{a-b}$ c) $\frac{a+b}{a-b} (a-b)^2$
- d) $\frac{a-b}{a+b} \cdot (b^2-a^2)$ e) $(b^2-a^2) \cdot \frac{a+b}{a-b}$ f) $\frac{a+b}{a-b} (b-a)^2$
7. a) $\frac{8-24z}{3x-y} \cdot \frac{18x-6y}{8z-24}$ b) $\frac{20m-12n}{55mn} \cdot \frac{22m^2n-33mn}{5m-3n}$
- c) $\frac{6uv-14v^2}{u^2+u} \cdot \frac{3u^2-3}{7v^2-3uv}$ d) $\frac{48a^2c-28ab}{28abc+24bc^2} \cdot \frac{21ac+18c^2}{14b^2-24abc}$
8. a) $\frac{3x-1}{x^2-4} \cdot \frac{2x+4}{9x^2-3x}$ b) $\frac{(5m-n)^2}{13mn} \cdot \frac{78m^2+39m}{25m^2-n^2}$
9. a) $\frac{36a^2-84ab+49b^2}{(3ab)^2} \cdot \frac{27(ab)^3}{14a^2-12ab}$
- b) $\frac{3(a+b)^2}{4x^2-y^2} \cdot \frac{4x+2y}{2ax-ay+2bx-by}$
- 10. a) $\frac{15x-5x^2}{x^2+x-6} \cdot \frac{4-x^2}{18-2x^2} \cdot \frac{2x^2+12x+18}{5x^2+10x}$
- b) $\frac{2x-5}{6x^2-x-12} \cdot \frac{3x+4}{8x^2-14x-15}$
- 11. a) $\frac{40x^2-29x+3}{9x+2} \cdot \frac{45x^2-17x-6}{8x-1}$
- b) $\frac{2a^2-5ab+3b^2}{3a^2+ab-2b^2} \cdot \frac{3a^2-5ab+2b^2}{2a^2-ab-3b^2}$

$$12. \text{ a) } \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{x}\right) \cdot 2x \quad \text{b) } \left(\frac{1}{m} - \frac{3}{2n}\right) \cdot \frac{mn}{3m-2n} \quad \text{c) } \left(\frac{6}{y} - \frac{3}{4z}\right) \cdot \frac{8yz}{8z-y}$$

$$13. \text{ a) } \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) \cdot \frac{x+y}{x-y} \quad \text{b) } (7z^5 - 5z^7) \left(\frac{7}{z^7} + \frac{5}{z^5}\right)$$

$$14. \text{ a) } x^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{b) } \frac{8u^2}{9u-30v} \cdot \left(\frac{5}{3uv} - \frac{1}{2v^2}\right) \cdot 18v$$

$$15. \text{ a) } \left(\frac{1}{p^2} + \frac{2}{pq} + \frac{1}{q^2}\right) \cdot \frac{pq}{p+q} \quad \text{b) } \left(\frac{1}{4} - \frac{n}{4m} - \frac{m}{16n}\right) \cdot \frac{2^4 mn}{m-2n}$$

$$16. \text{ a) } (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad \text{b) } \frac{1}{a+b} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$\text{c) } \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) (a-b) \quad \text{d) } \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{1}{a-b}$$

$$17. \text{ a) } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \quad \text{b) } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 \quad \text{c) } \left(\frac{2}{3x} - \frac{5}{7y}\right)^2$$

$$18. \text{ a) } \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{2}\right) \left(\frac{3}{a} - \frac{2}{b}\right) \quad \text{b) } \left(\frac{5}{2x} + \frac{2}{7y}\right) \left(\frac{2x}{7} - \frac{5y}{2}\right)$$

$$\bullet 19. \text{ a) } \left(\frac{u}{u+v} + \frac{v}{u-v}\right) \left(u - \frac{v^2}{u}\right) \quad \text{b) } \left(\frac{r}{4s} - \frac{s}{9r}\right) \left(\frac{s}{r} - \frac{3s}{3r+2s}\right)$$

$$\text{c) } \left(8x + \frac{9y^2}{2x-3y}\right) \left(\frac{12xy-4x^2}{4x-3y} - 3y\right) \quad \text{d) } \left(\frac{4q}{7p} - 2\right) \cdot \left(1 - \frac{21p^2}{20q^2}\right)$$

$$20. \text{ a) } \left(9x - \frac{15x}{14y}\right) \cdot \left(7y + \frac{28y}{27x}\right) \quad \text{b) } \left(\frac{12}{25}a + \frac{16a^2}{15b}\right) \cdot \left(\frac{35b^2}{8a} - 3\frac{3}{4}b\right)$$

$$\bullet 21. \text{ a) } \left(\frac{7c+d}{4c+3d} - 1\right) \left(4 + \frac{10d-13c}{4c-3d}\right) \quad \text{b) } \left(\frac{a-3b}{3a-9b} + \frac{a+2b}{2a-6b}\right)^2$$

$$\text{c) } \left(\frac{p}{2p+10q} + \frac{2,5q}{p+5q}\right) \left(\frac{p}{2p+10q} - \frac{2,5q}{p+5q}\right)$$

$$\text{d) } \left(\frac{a}{2b} + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3b} - \frac{3b}{4a}\right)^2$$

$$22. \text{ a) } \left(\frac{2a}{3b} - \frac{4b}{3a}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4b} - \frac{2b}{3a}\right)^2 \quad \text{b) } \left(\frac{p}{5q} + \frac{3q}{2p}\right)^2 - \left(\frac{2p}{3q} - \frac{5q}{2p}\right)^2$$

$$c) \left(\frac{2a}{3b} - \frac{3b}{4a} \right) \cdot \left(\frac{3a}{4b} - \frac{2b}{3a} \right) - \left(\frac{a}{3b} - \frac{b}{4a} \right) \cdot \left(\frac{a}{4b} - \frac{b}{6a} \right)$$

$$23. a) \left(\frac{x^2}{x^2 - y^2} + \frac{x}{x + y} - 1 \right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \quad b) \left(\frac{y^2}{x^2 - y^2} + \frac{x}{x - y} - 1 \right) \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y} \right)$$

$$\bullet 24. a) \left(\frac{m}{3n} + \frac{3m + 11n}{6m - 3n} + 1 \right) \left(\frac{13m - 4n}{2m + 4n} - \frac{n}{m} + \frac{3}{2} \right)$$

$$b) \left(\frac{2x + 3y}{3x - 4y} - \frac{2x - 3y}{3x + 4y} \right) \cdot \frac{9x^2 - 16y^2}{4x^2 - 9y^2}$$

$$25. a) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) (1 + z + z^2) \quad b) \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right)$$

$$\bullet 26. a) \left(\frac{x}{3} + \frac{x^2}{3x - 2y} - \frac{2xy}{9x - 6y} \right) \left(\frac{x}{3} - \frac{x^2}{3x - 2y} + \frac{2xy}{9x - 6y} \right)$$

$$b) \left(\frac{a^2}{x^2} + \frac{ab}{xy} + \frac{b^2}{y^2} \right) \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)$$

$$c) \left(\frac{x^3}{r^3} - \frac{2x^2}{r^2} + \frac{3x}{r} - 4 \right) \cdot \left(\frac{r^2}{x^2} + \frac{2r}{x} + 3 \right)$$

$$d) \left(\frac{2a^2x}{27b^2y} + \frac{4ay}{9bx} - \frac{8by^2}{3ax^2} \right) \cdot \left(\frac{3b^2y}{8a^2x} + \frac{9bx}{4ay} - \frac{27ax^2}{2by^2} \right)$$

$$\bullet 27. a) \left(1 + \frac{1}{a^2} \right) \left(\frac{4ab}{a^2 - b^2} + \frac{a - b}{a + b} - \frac{a + b}{a - b} \right)$$

$$b) \left(\frac{a}{a - b} - \frac{b}{a + b} - \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \right) \left(\frac{3}{5a^2 + 1} + \frac{(1 - a)^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^4} \right)$$

$$c) \frac{x}{y} \cdot \left(\frac{2y^2 + 1}{xy} - \frac{y}{x} \right) \left(\frac{2x - y}{x - 1} + \frac{6x + y}{x + 3} + \frac{4y - 8x^2}{x^2 + 2x - 3} \right)$$

- 28. LEONARDO VON PISA, genannt FIBONACCI, (um 1170 – nach 1240) schreibt: Die Zahl a sei in zwei Teile [= Summanden] b, g geteilt. Man teile a durch b , das Ergebnis sei e ; und man teile a durch g , das Ergebnis sei d . Ich behaupte, dass das Produkt von d und e gleich der Summe von d und e ist. Zeige, dass LEONARDO Recht hat.

2.4 Dividieren von Bruchtermen

Vom Rechnen mit Zahlen kennen wir die Regel, dass durch einen Bruch dividiert wird, indem man mit seinem Kehrwert* multipliziert. So ist z. B.

$$\frac{3}{7} : \frac{8}{13} = \frac{3}{7} \cdot \frac{13}{8} = \frac{3 \cdot 13}{7 \cdot 8} = \frac{39}{56}.$$

Aus diesem Grund ergeben die Terme $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ und $\frac{ad}{bc}$ bei jeder Einsetzung denselben Zahlenwert. Also sind sie äquivalent. Damit wissen wir, wie man durch einen Bruchterm dividiert:

Satz 48.1: Durch einen Bruchterm wird dividiert, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert; kurz:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \quad \text{bzw.} \quad a : \frac{c}{d} = \frac{ad}{c}.$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{42(x-y)^2}{85(a^2-b^2)} : \frac{56(x^2-y^2)}{51(a+b)^2} &= \frac{42(x-y)^2 \cdot 51(a+b)^2}{85(a-b)(a+b) \cdot 56(x-y)(x+y)} = \\ &= \frac{3 \cdot 3(x-y)(a+b)}{5 \cdot 4(a-b)(x+y)} = \frac{9(x-y)(a+b)}{20(a-b)(x+y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 25a^5 : \frac{15a^2}{4b^2} &= 25a^5 \cdot \frac{4b^2}{15a^2} = \frac{25a^5 \cdot 4b^2}{15a^2} = \frac{5 \cdot 4a^3b^2}{3} = \frac{20a^3b^2}{3} = \\ &= \frac{20}{3} a^3b^2 \end{aligned}$$

Weil jeder Term c als Bruchterm $\frac{c}{1}$ geschrieben werden kann, lässt sich Satz 48.1 auch auf Divisionen vom Typ $\frac{a}{b} : c$ anwenden. Es gilt also:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$$

Beispiel: $\frac{63uv}{41x} : (42uv^2) = \frac{63uv}{41x} \cdot \frac{1}{42uv^2} = \frac{63uv}{41x \cdot 42uv^2} = \frac{3}{82vx}$

* Statt Kehrwert sagt man auch **reziproker Wert**, entstanden aus dem lateinischen *reciprocus* = auf demselben Weg zurückkehrend, dessen ursprüngliche Bedeutung aber rückwärts und vorwärts ist.

**Zur Geschichte der Divisionsregel

In den alten Schriften ging man beim Dividieren durch einen Bruch anders vor als in Satz 48.1. Hatte man nämlich gleichnamige Brüche, z. B. $\frac{7}{4} : \frac{3}{4}$, so konnte man die Nenner wie eine Benennung auffassen und dann die Division wie bei benannten ganzen Zahlen durchführen, also 7 Viertel : 3 Viertel = $7 : 3 = \frac{7}{3}$, d. h., man dividierte die Zähler durcheinander. Ungleichnamige Brüche machte man erst gleichnamig. So findet man in Aufgabe 36 des *Papyrus Rhind* $1 : (3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}) = \frac{30}{30} : \frac{106}{30} = 30 : 106$. Ebenso rechneten die Griechen, die Chinesen, die Araber und daher lange Zeit auch das

Abendland, wo man wegen $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc}$ in vielen Büchern ohne weitere Erklärung das Dividieren als *Über-Kreuz-Multiplizieren* an Hand der Figur $\frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{16}{15}$ einführte.

Unsere Regel vom Umkehren des Divisorbruchs lehrte in Indien SCHRĪDHARA (um 900). Im Abendland scheint sie 1544 Michael STIFEL (1487(?)–1567) in seiner *Arithmetica integra* erfunden zu haben; denn 1553 nennt er sie stolz »meyn Regel vom diuidiren der bruch«. Abbildung 49.1 gibt sie wieder.

¶ De Diuisione Minutiarum.

Ego Diuisionis regulam reduco ad regulam Multiplicationis Minutiarum, hoc modo: Diuisoris terminos commuto, id est, numeratorem pono sub uirgula, & denominatorem supra uirgulam pono. Hoc facto, nihil aliud restat, nisi ut opere ris iuxta regulam Multiplicationis superius datam.

Vt uolo diuidere $\frac{1}{2}$ per $\frac{2}{3}$. Sic stabit exemplum ad regulam, $\frac{1}{2} \text{ — } \frac{2}{3}$, facit $\frac{3}{4}$ quotientem.

Sic si uelim diuidere $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{2}$. Sic stabit exemplum $\frac{2}{3} \text{ — } \frac{1}{2}$, facitque hunc quotientem $\frac{4}{3}$, seu $1 \frac{1}{3}$. Et sic de alijs.

Et ego noui quam commodè fiat hæc regulæ Diuisionis reductio, & quam sæpe memoriæ leuet, præsertim in operationibus exemplorum secundum Algebram fiendorum.

Abb. 49.1 Die Divisionsregel für Brüche aus Michael STIFELS *Arithmetica integra* (folium 6r) von 1544 – Übersetzung im Lösungsheft.

Aufgaben

1. a) $\frac{x}{5} : x$

b) $\frac{x}{5} : 5$

c) $3 : \frac{y}{3}$

d) $21y : \frac{3y}{14}$

2. a) $\frac{a}{2} : \frac{a}{3}$

b) $\frac{a}{2} : \frac{b}{4}$

c) $\frac{5x}{12} : \frac{x}{3}$

d) $\frac{9x}{25} : \frac{5y}{3}$

3. a) $\frac{2}{a^2} : (6a)$

b) $8xy : \frac{4}{x}$

c) $\frac{16u^2}{9v} : (12w)$

d) $21ab^2 : \frac{7a}{3b}$

4. a) $\frac{4x}{5y} : \frac{5y}{4x}$ b) $\frac{18m}{35n} : \frac{7m}{9n}$ c) $\frac{108}{25pq} : \frac{135p}{q^2}$ d) $\frac{72ab^2}{27c} : \frac{16a^2b}{45c^2}$
- 5. a) $\frac{147(uv^2w)^2}{1024ab^3} : \frac{196u^3w}{640(ab)^3}$ b) $\left(\frac{12m^3n}{55xyz^2}\right)^2 : \frac{27m^4x^2}{242ny^2z}$
6. a) $\frac{5(2a-b)}{9} : \frac{4a-2b}{15}$ b) $\frac{5m}{3n-5} : \frac{m^2}{5-3n}$
7. a) $\frac{rs}{24r-32s+20t} : \frac{st}{30r-40s+25t}$ b) $\frac{8x-28y}{5yz-3y} : \frac{21y-6x}{20z-12}$
8. a) $(a^2-9b^2) : \frac{a+3b}{a-3b}$ b) $\frac{6x-6y}{5x+5y} : (3x^2-3y^2)$
9. a) $(2m^2+20m+50) : \frac{m-5}{15+3m}$ b) $\frac{x-3}{3x+15} : (x^2+2x-15)$
10. a) $\frac{25a^2-20ab+4b^2}{4c^2+56c+196} : \frac{5a-2b}{3c+21}$ b) $\frac{8u-20v}{9+3w} : \frac{4u^2-25v^2}{w^2+6w+9}$
11. a) $\frac{9p^2-36q^2}{3-r} : \frac{2p-4q}{r^2-9}$ b) $\frac{18s-2}{81s^2+18s+1} : \frac{2}{1-81s^2}$
- 12. a) $\frac{x^2-1}{1-y^2} : \left(\frac{x-1}{1-y}\right)^2$ b) $\frac{(x-1)^2+4x}{x^2+4y^2} : \frac{3x^2+6x+3}{4xy-(x+2y)^2}$
13. a) $\left(\frac{1}{a} : \frac{1}{b}\right) : \frac{1}{c}$ b) $\frac{1}{a} : \left(\frac{1}{b} : \frac{1}{c}\right)$ c) $\frac{1}{b} : \left(\frac{1}{c} : \frac{1}{a}\right)$
14. a) $\left(\frac{u}{v} : \frac{v}{w}\right) : \frac{w}{x}$ b) $\frac{u}{v} : \left(\frac{v}{w} : \frac{w}{x}\right)$ c) $\left(\frac{v}{u} : \frac{w}{v}\right) : \frac{x}{w}$
15. a) $\left(\frac{1}{y} : y^2\right) : \frac{1}{y^3}$ b) $\left[\frac{1}{z} : \left(\frac{1}{z^2} : \frac{1}{z^3}\right)\right] : \frac{1}{z^4}$
- 16. a) $\frac{x^2-9}{6y} : \left(z : \frac{xyz}{x+3}\right)$ b) $\left(\frac{(2m+1)^2}{n-2} : \frac{3n+6}{4m-2}\right) : \frac{4m^2-1}{4-n^2}$
17. a) $\frac{51(x^2-y^2)}{7xy} : [68(x-y)^2]$ b) $\frac{54(a^2-b^2)}{13a} : [81(ab+b^2)]$
- c) $\frac{5ab(x-y)}{6xy(x+y)} : \frac{10ax(x-y)}{3by(x+y)}$ d) $\frac{38a(a-b)}{51b(x-y)} : \frac{57b(a^2-b^2)}{68a(x^2-y^2)}$

$$18. \text{ a) } \left(\frac{7ab}{2c} + \frac{4bc^2}{a} \right) : (14abc) \quad \text{b) } \left(\frac{5m^2}{2n} - \frac{7mn}{12} \right) : \frac{m^2n^3}{4}$$

$$\text{c) } \left(\frac{-3x^4y^2}{4z^3} - \frac{12(xy)^2}{5z} + \frac{9x^3y}{10z^5} \right) : \frac{21x^2y^3}{20z^4}$$

$$\bullet 19. \text{ a) } \left(\frac{2s-5r}{5r+2s} + \frac{5r+2s}{5r-2s} \right) : \frac{5r^2s}{4s^2-25r^2}$$

$$\text{b) } \left(\frac{1-p}{3q-8p} - \frac{p-1}{3q+8p} \right) : \left(\frac{1}{8p^2+3pq} \cdot \frac{6p}{q} \right)$$

$$\text{c) } \left(\frac{2x+8}{3a-5b} - \frac{x^2+8x+16}{9a^2-25b^2} + \frac{4+x}{9a+15b} \right) : \frac{x^2-16}{9a^2-25b^2}$$

$$20. \text{ a) } \frac{21a^2b}{10c^2} : \left(\frac{5ab}{3c} + \frac{ab}{5c} \right) \quad \text{b) } \frac{7p+4q}{40pq} : \left(\frac{2q}{7p} - \frac{7p}{8q} \right)$$

$$\bullet 21. \text{ a) } \frac{u^2-2u+1}{4u^2-36} : \left(\frac{2u-2}{u-3} - \frac{3-3u}{u+3} + \frac{1-u^2}{u^2-9} \right)$$

$$\text{b) } \left(\frac{26a^3b^3}{5c^2d} + \frac{8a^4b^2}{5cd^2} \right) : \left(\frac{3a^2b^3}{8c^2d^2} - \frac{5a^3b^2}{2cd^3} \right)$$

$$\text{c) } \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{2}{1-x^2} + \frac{2x+1}{1-x^4} \right) : \left(\frac{1}{1+x} + \frac{x+7}{1+x^2} \right)$$

$$\bullet 22. \text{ a) } \left(x^4 - \frac{1}{y^4} \right) : \left(x + \frac{1}{y} \right) \quad \text{b) } \left(x^4 - \frac{1}{y^4} \right) : \left(x - \frac{1}{y} \right)$$

$$\bullet 23. \text{ a) } \left(\frac{a^2}{bc} + \frac{bc}{d^2} + 2 \cdot \frac{a}{d} \right) : \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) \quad \text{b) } \left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{1}{12} - \frac{y^2}{2x^2} \right) : \left(\frac{3x}{2y} + \frac{y}{x} \right)$$

$$\bullet 24. \text{ a) } \left(\frac{a+b}{b} - \frac{a-b}{a} + \frac{(a+b)^2}{b} - \frac{(a-b)^2}{b} \right) : (a^2 - b^2)$$

$$\text{b) } \left(\frac{-2r-5t}{3r} - \frac{2r+5t}{5t} + \frac{4r^2-25t^2}{3} \right) : (4r^2 - 25t^2)$$

$$\text{c) } \left(\frac{6xy+9y^2}{2x} - \frac{4x^2+6xy}{3y} + \frac{8x^3+27y^3}{6xy} - 2x - 3y \right) : (4x^2 - 9y^2)$$

2.5 Doppelbrüche

Ein Bruchterm, in dessen Zähler oder Nenner wieder Bruchterme auftreten,

heißt **Doppelbruch**. So sind $\frac{\frac{3x}{2y}}{\frac{2x}{3y}}$ und $\frac{1 + \frac{a}{b}}{1 - \frac{a}{b}}$ Beispiele für Doppelbrüche.

Damit klar erkennbar ist, was Zähler und was Nenner ist, muss der Hauptbruchstrich deutlich länger sein als die Nebenbruchstriche.

So ist z. B. $\frac{\frac{3x}{2y}}{\frac{2x}{3y}}$ etwas anderes als $\frac{\frac{3x}{2y}}{\frac{2y}{2x}}$!

Zur Umformung eines Doppelbruchs könnte man den Hauptbruchstrich durch den Divisions-Doppelpunkt ersetzen und Satz 48.1 anwenden. Besser ist es aber, den Doppelbruch so zu erweitern, dass er zu einem einfachen Bruch wird. Wir führen es zunächst an einem Zahlenbeispiel vor:

$\frac{1 + \frac{3}{4}}{\frac{3}{2} - \frac{5}{3}}$ erweitern wir mit dem Hauptnenner 12 der Nebenbrüche:

$$\frac{\left(1 + \frac{3}{4}\right) \cdot 12}{\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{3}\right) \cdot 12} = \frac{12 + 9}{18 - 20} = -\frac{21}{2}.$$

Bei Doppelbrüchen mit Bruchtermen geht es genauso:

$$\frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2} = \frac{\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) xy}{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2\right) xy} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 2xy} = \frac{(x - y)(x + y)}{(x + y)^2} = \frac{x - y}{x + y}.$$

Merke dir die

Regel: Doppelbrüche werden vereinfacht, indem man sie mit dem Hauptnenner der Brüche im Zähler und Nenner erweitert.

Aufgaben

$$1. \quad \begin{array}{lllll} \text{a)} & \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} & \text{b)} & \frac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{a}} & \text{c)} & \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}} & \text{d)} & \frac{\frac{a}{b}}{a} & \text{e)} & \frac{\frac{a}{b}}{b} \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} \text{f)} & \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{a}} & \text{g)} & \frac{\frac{a}{b}}{c} & \text{h)} & \frac{\frac{a^2}{b}}{\frac{a}{b^2}} & \text{i)} & \frac{\frac{a^2}{b}}{ab} & \text{j)} & \frac{\frac{a^2}{b}}{\frac{a}{ab}} \end{array}$$

$$2. \quad \begin{array}{llll} \text{a)} & \frac{\frac{3a^2}{14x^2}}{\frac{9a}{7x}} & \text{b)} & \frac{\frac{24a^2b^3}{35x^3y^2}}{\frac{36ab}{49x^2y}} & \text{c)} & \frac{\frac{25p^5y^3}{21r^4s^6}}{\frac{35p^3y^5}{12r^5s^5}} & \text{d)} & \frac{\frac{125a^4x}{111p^2q^3}}{\frac{175ax^4}{148p^3q^2}} \end{array}$$

$$3. \quad \begin{array}{lll} \text{a)} & \frac{a + \frac{b}{c}}{d} & \text{b)} & \frac{a}{b - \frac{c}{d}} & \text{c)} & \frac{a + \frac{b}{c}}{a - \frac{b}{c}} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{d)} & \frac{a + \frac{b}{c}}{a - \frac{c}{d}} & \text{e)} & \frac{2 + \frac{a}{3}}{b} & \text{f)} & \frac{3a}{5b - \frac{4c}{5}} \end{array}$$

$$4. \quad \begin{array}{lll} \text{a)} & \frac{\frac{9a^2}{2b} - 2b}{\frac{3a}{2b} - 1} & \text{b)} & \frac{3a - \frac{4x^2}{3a}}{1 + \frac{2x}{3a}} & \text{c)} & \frac{\frac{a}{5} + 4x}{\frac{a}{4} + 5x} \end{array}$$

$$5. \quad \begin{array}{lll} \text{a)} & \frac{\frac{a^3 - ab^2}{b}}{\frac{a^3 - a^2b}{b^2}} & \text{b)} & \frac{1 - \frac{a^2}{b^2}}{1 + \frac{a}{b}} & \text{c)} & \frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} + 2 + \frac{b}{a}} \end{array}$$

$$6. \quad \begin{array}{lll} \text{a)} & \frac{a - \frac{a(b^2 - a)}{b^2}}{b - \frac{b^3 - a}{b^2}} & \text{b)} & \frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2} & \text{c)} & \frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2} \end{array}$$

$$7. \quad a) \quad \frac{\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1}}{\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1}}$$

$$b) \quad \frac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}{\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1}}$$

$$c) \quad \frac{\frac{2a-3b}{2a+3b} + \frac{2a+3b}{2a-3b}}{\frac{2a+3b}{2a-3b} - \frac{2a-3b}{2a+3b}}$$

8. **Kettenbrüche** in ihrer einfachsten Form verwendet Raffaele BOMBELLI (1526 Bologna–1572 ebd.) in seiner *L'Algebra* (1557/60 niedergeschrieben, 1572 erschienen). Pietro Antonio CATALDI (1552 Bologna–1626 ebd.) bildet im *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri* (1597 verfasst, 1613 erschienen) sogar unendliche Kettenbrüche. Verwandle die folgenden Kettenbruchterme in die übliche Bruchform, d. h. in Bruchterme, bei denen weder im Zähler noch im Nenner Bruchstriche vorkommen.

$$a) \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}$$

$$b) \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}}$$

$$c) \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}}}$$

$$d) \quad \frac{1}{x + \frac{1}{x+1}}$$

$$e) \quad \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x+1}}}$$

$$f) \quad \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x+1}}}}$$