Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

1.1 Definitionsmenge

1.1 Definitionsmenge

Ein Term ist ein Rechenausdruck mit Zahlen und Variablen.

Beispiele für Terme sind: $x^2 - 7$; $\frac{3}{7}$; $\frac{a}{b}$; $\frac{a-b}{c+7}$; $3a(a-b)$.

Keine Terme sind: $a + : 3$; $3 + x -$; $2(-)x) +$.

Im Folgenden werden wir uns hauptsächlich mit Bruchtermen befassen:

Definition 11.1: Ein Quotient zweier Terme heißt **Bruchterm**.

Beispiele für Bruchterme sind: $\frac{3}{x}$; $\frac{2+x}{3-x}$; $\frac{1}{(a+b)^2}$; $\frac{5}{y-y}$.

Keine Bruchterme sind: $3x$; $(a+b)^2$; $1 + x + x^2$.

Der Bruchterm $\frac{3}{x-4}$ liefert für fast alle Einsetzungen Zahlenterme. So ergibt sich für $x = 0$ der Zahlenterm $\frac{3}{0-4} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$.

Nur die Einsetzung $x = 4$ macht Schwierigkeiten; man erhält nämlich $\frac{3}{4-4} = \frac{3}{0}$. Das ist aber kein Zahlenterm, weil man durch null nicht teilen kann. Die Zahl 4 gehört demnach nicht zur Definitionsmenge D des Bruchterms $\frac{3}{x-4}$; denn die Definitionsmenge eines Terms besteht ja gerade aus den Einsetzungen, für die der Term zu einem Zahlenterm wird.

Ein Bruchterm wird nur dann nicht zu einem Zahlenterm, wenn beim Einsetzen der Nenner null wird. Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst nur Bruchterme, bei denen nur eine einzige Variable im Nenner auftritt. Für solche Bruchterme gilt:

Satz 11.1: Die Definitionsmenge eines Bruchterms mit einer Variablen ist die Menge der Zahlen, die man für die Variable einsetzen kann, ohne dass der Nenner null wird.

Zur Bestimmung der Definitionsmenge eines Bruchterms muss man also alle Zahlen ermitteln, für die der Nenner null wird. Man nennt diese Zahlen **Nullstellen des Nenners**. Die Definitionsmenge D eines Bruchterms ist also die Grundmenge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ohne die Menge der Nullstellen des Nenners.

Versteht man unter $A \setminus B$ (gelesen »A ohne B«) die Menge der Elemente von A, die nicht zugleich zu B gehören, so kann man schreiben:

$$\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \text{Menge der Nullstellen des Nenners}}$$

Für unser Beispiel sieht das so aus:

Der Term $\frac{3}{x-4}$ hat die Definitionsmenge $D = \mathbb{Q} \setminus \{4\}$.

Die Menge $\mathbb{Q} \setminus \{4\}$ kann man auch kürzer durch die Ungleichung $x \neq 4$ beschreiben.

Beispiele: **1)** $\frac{-1}{x-1}$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

2) $\frac{x-1}{2x-1}$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

3) $\frac{2}{(x-1)(2+x)}$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 1\}$

Es ist nicht immer ganz leicht, die Nullstellen des Nenners zu erkennen. In komplizierteren Fällen empfehlen wir folgendes Vorgehen:

- Nenner null setzen
- Nenner faktorisieren (ausklammern, binomische Formeln anwenden)
- Jeden Faktor einzeln null setzen und die Gleichungen lösen

Beispiele: **1)** $\frac{1}{x^2+x}$

NR: $x^2 + x = 0$
$$x(x+1) = 0$$
$$\underline{\underline{x = 0}} \text{ oder } x + 1 = 0$$
$$\underline{\underline{x = -1}}$$

Also: $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 0\}$

2) $\frac{1}{0{,}1x^3 - 8x^2}$

NR: $0{,}1x^3 - 8x^2 = 0$
$$x^2(0{,}1x - 8) = 0$$
$$x^2 = 0 \text{ oder } 0{,}1x - 8 = 0$$
$$\underline{\underline{x = 0}} \quad 0{,}1x = 8$$
$$x = \tfrac{8}{0{,}1}$$
$$\underline{\underline{x = 80}}$$

Also: $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 80\}$

3) $\frac{x+1}{x^2+6x+9}$

NR: $x^2 + 6x + 9 = 0$
$$(x+3)^2 = 0$$
$$x + 3 = 0$$
$$\underline{\underline{x = -3}}$$

Also: $D = \mathbb{Q} \setminus \{-3\}$

Aufgaben

Gib die Definitionsmenge an:

1. a) $\frac{2,3}{x-2,3}$ b) $\frac{x}{0,1+x}$ c) $\frac{1}{2-x}$ d) $\frac{x+x^2}{x^2}$

2. a) $\frac{2x+6}{2x-6}$ b) $\frac{3}{8-4x}$ c) $\frac{0,1}{8x+8}$ d) $\frac{14}{28+0,7x}$

3. a) $\frac{1}{2x-9}$ b) $\frac{2}{18+4x}$ c) $\frac{3}{0,2x-1,2}$ d) $\frac{4}{3,06+0,01x}$

4. a) $\frac{8a}{(x-1)(x-3)}$ b) $\frac{8b}{(x+2)(4-x)}$

c) $\frac{8c}{(3x+18)(0,8x-1)}$ d) $\frac{8d}{x(2,4x-2\frac{1}{4})}$

5. a) $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ b) $\frac{3x+2}{(2x-3)(3x-2)(2x+3)}$

c) $\frac{0,1x-1}{x(x+0,1)(0,1x+0,1)}$

6. a) $\frac{x}{x^2+x}$ b) $\frac{x^2}{3x-4x^2}$ c) $\frac{x^3}{2x+2+x^2+x}$ d) $\frac{x^4}{7x^4+8x^5}$

7. a) $\frac{7a}{x^2-9}$ b) $\frac{7b}{1-x^2}$ c) $\frac{7c}{4x^2-0,16}$ d) $\frac{7d}{32x^2-2}$

8. a) $\frac{2}{4x^2-1\frac{7}{9}}$ b) $\frac{4}{x^4-16}$ c) $\frac{8}{x^4+16}$ d) $\frac{16}{x^2-x^4}$

9. a) $\frac{1980}{x^2-2x+1}$ b) $\frac{1981}{x^2+4x+4}$ c) $\frac{1982}{6x+9+x^2}$ d) $\frac{1983}{9x^2+4+12x}$

10. a) $\frac{333}{3x^3+6x^2+3x}$ b) $\frac{1492}{10x^3-4x^2+0,4x}$ c) $\frac{1789}{x-25-0,01x^2}$

11. a) $\frac{x+6}{(x-6)(x^2-6^2)}$ b) $\frac{6x}{(6x-1)(1+2x)(6^2x+6)}$

12. a) $\frac{1}{0,0001x^4-1}$ b) $\frac{m\cdot 0\cdot n\cdot(s-te+r)}{9^4x^4-0,02\cdot 9^2\cdot 6^2x^2+0,0001\cdot 6^4}$

13. Gib einen Bruchterm an, bei dem die aufgeführten Zahlen nicht in der Definitionsmenge liegen:

a) 1 b) 1; -2 c) 0; $-\frac{1}{3}$