Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

I. Was ist Analytische Geometrie?

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

I. Was ist Analytische Geometrie ?

René Descartes (1596 bis 1650)

In der Geometrie der Unter- und Mittelstufe löst man geometrische Aufgaben im wesentlichen durch Konstruktion, begründet man Zusammenhänge durch Beweise. Diese Art der Geometrie heißt auch **Synthetische Geometrie** ('ganzheitliche Geometrie'). Altmeister dieser Geometrie ist EUKLID (um 300 v.Chr. in Alexandrien). Schon im Altertum beginnt man, in der Geometrie auch zu rechnen – zum Beispiel mit den Strahlensätzen, mit dem Satz von PYTHAGORAS und in der Trigonometrie.

Im Barock, Anfang des 17. Jahrhunderts, finden der französische Mathematiker Pierre de FERMAT (Beaumont de Lomagne 17(?).8.1601 bis 12.1.1665 Castres) und der französische Philosoph und Mathematiker René DESCARTES (La Haye 31.3.1596 bis 11.2.1650 Stockholm) eine neuartige Methode, geometrische Probleme zu lösen. Die beiden gehen in entgegengesetzter Richtung vor: FERMAT setzt bei einer Koordinatengleichung an und sucht die zugehörige Kurve, während DESCARTES bei der Kurve ansetzt und die zugehörige Koordinatengleichung sucht.

FERMAT legt seine Ideen um 1635 dar in seiner Schrift »Ad locos planos et solidos isagoge« ('Einführung in die ebenen und räumlichen Figuren'). Aber erst 44 Jahre später, also 1679, wird sie von seinem Sohn Clément-Samuel veröffentlicht.

1637 erscheint DESCARTES' berühmter »Discours de la Méthode« mit der Erläuterung »pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences« ('Abhandlung über die Methode, seine Vernunft gut zu leiten und die Wahrheit in den Wissenschaften zu suchen'). Im Anhang »La géométrie« führt er die neue mathematische Methode vor. DESCARTES gilt als der Vater der Analytischen Geometrie, denn schon am 26. März 1619 schreibt er in einem Brief an den niederländischen Mathematiker Isaac BEECKMAN sinngemäß, er habe eine völlig neue Wissenschaft entdeckt, mit der er alle Probleme der Geometrie lösen könne. DESCARTES löst sich von der konstruktiven Synthetischen Geometrie der Griechen und algebraisiert die Geometrie jetzt konsequent: Er führt einen Bezugpunkt O (Ursprung) und zwei Koordinatenachsen ein. Indem er jedem Punkt der Ebene zwei Zahlen, die Koordinaten, zuordnet, kann DESCARTES geometrische Figuren wie Geraden und Kreise als Lösungsmengen von Gleichungen algebraisch darstellen und zum Beispiel Schnittpunkte über die Lösung von Gleichungssystemen berechnen. Damit ist die Analytische Geometrie geboren! (analytisch: auf einem zergliedernden Verfahren beruhend.)

Unter **Analytischer Geometrie** versteht man heute die Verwendung der Koordinatenrechnung in der Geometrie. Sie hat sich weiterentwickelt in der reinen Mathematik zur *Algebraischen Geometrie*, in der es um Gleichungen höheren Grades geht, und zur *Differentialgeometrie*, in der man auch die Analysis (Differenzieren, Integrieren) mit einbezieht. Dabei wagt man sich auch in Räume höherer Dimension vor. In der angewandten Mathematik ist die Analytische Geometrie ein unentbehrliches Hilfsmittel für die Darstellung räumlicher Sachverhalte in Physik, Chemie und Technik. Einen neuen Aufschwung erlebt sie in unseren Tagen bei der elektronischen Verarbeitung grafischer Daten. Konstruktionsbüros, vor allem die der Automobilindustrie, kommen heute ohne Computergrafik nicht mehr aus. Und ohne Analytische Geometrie gäbs keine Computergrafik!

In der Algebra der Mittelstufe haben wir schon erste Bekanntschaft mit der Analytischen Geometrie gemacht – dazu nun zwei Beispiele:

Schnitt von Gerade und Parabel

Gerade g: $y = \frac{1}{2}x + 3$ I

Parabel p: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 7x - 12$ II

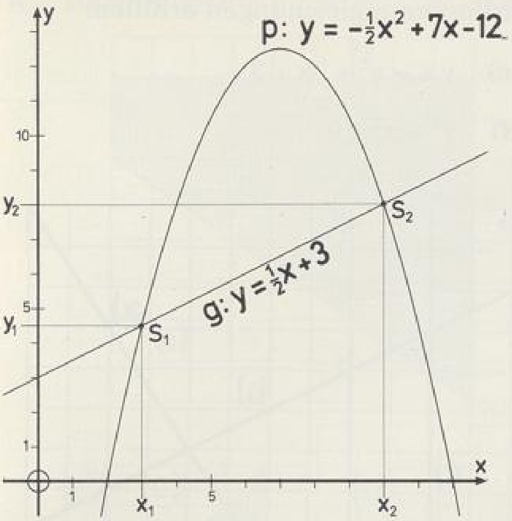
$$\text{I} - \text{II}: \quad 0 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 15$$

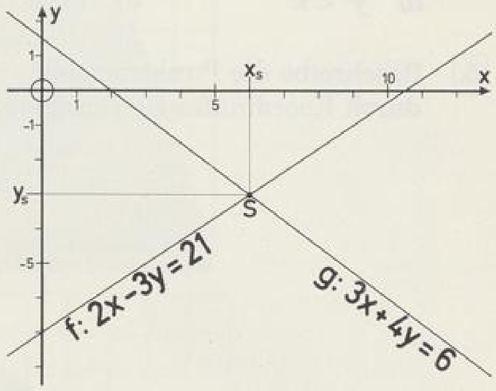
$$0 = x^2 - 13x + 30$$

$$0 = (x-3)(x-10) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 \qquad x_2 = 10$$

$$y_1 = 4{,}5 \qquad y_2 = 8$$

$$\mathbf{S_1(3 \mid 4{,}5)} \qquad \mathbf{S_2(10 \mid 8)}$$





Schnitt zweier Geraden

$$
\begin{array}{lll}
\text{Gerade f:} & 2x-3y=21 & \text{I} \qquad \text{(implizite Geradengleichungen)} \\
\text{Gerade g:} & 3x+4y=6 & \text{II} \\
\hline
\quad 3\cdot\text{I} & 6x-9y=63 & \\
-2\cdot\text{II} & -6x-8y=-12 & \\
\hline
3\cdot\text{I}-2\cdot\text{II} & -17y=51 & \\
 & \quad y=-3 & \text{eingesetzt in II: } 3x-12=6 \Rightarrow x=6 \quad \mathbf{S(6\,|-3)}
\end{array}
$$

In der klassischen Analytischen Geometrie kommen nur lineare und quadratische Gleichungen vor. In diesem Buch werden wir uns sogar nur mit linearen Gleichungen befassen. Weil man in der Analytischen Geometrie auf Schritt und Tritt linearen Gleichungssystemen begegnet, fangen wir nicht gleich mit der Geometrie an, sondern beschäftigen uns zunächst mit dem nötigen Handwerkszeug. Die *Lineare Algebra* lehrt den Umgang mit linearen Gleichungssystemen. Davon handelt das nächste Kapitel.

Aufgaben

1. Zeichne die Figuren, deren Punkte die Koordinatengleichungen erfüllen:

a) $y = 2x - 1$ b) $2x + 3y = 6$ c) $x = 5$ d) $y = -2$

2. Zeichne die Figuren, deren Punkte die Koordinatengleichungen erfüllen:

a) $y = x^2$ b) $y^2 = x$ c) $y = -(x-1)^2 + 2$ d) $y = -x^2 + 4x$

• **3.** Zeichne die Figuren, deren Punkte die Koordinatengleichungen erfüllen:

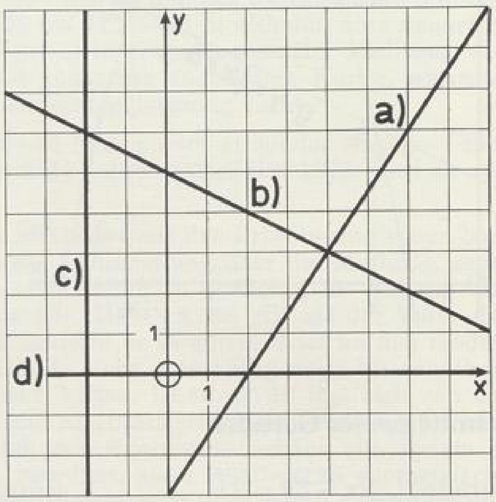
a) $y = |x|$ b) $|y| = x$ c) $|y| = |x|$ d) $|y| = x - 1$
e) $|y| = -|x|$ f) $|y - 1| = x - 1$ g) $|y| = |x - 1|$ h) $|y - 1| = |x|$

⁝ 4. Zeichne die Figuren, deren Punkte die Koordinatenungleichungen erfüllen:

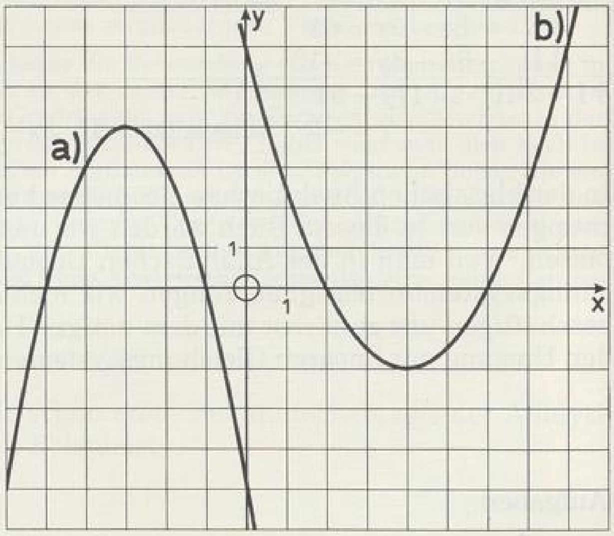
a) $y \leq -\frac{1}{2}x + 3$ **b)** $x < 2y$ **c)** $y \leq -x^2 + 2x + 3$

d) $y^2 < x^2$ **e)** $|y| + |x| \leq 1$ **f)** $y^2 - x^2 \geq 0$

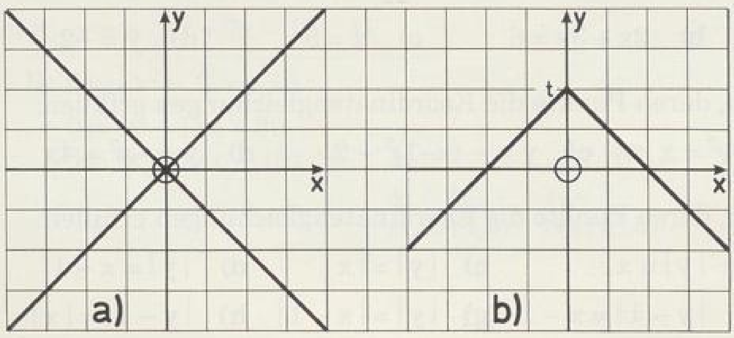
5. Beschreibe die Punktmengen durch Koordinatengleichungen:



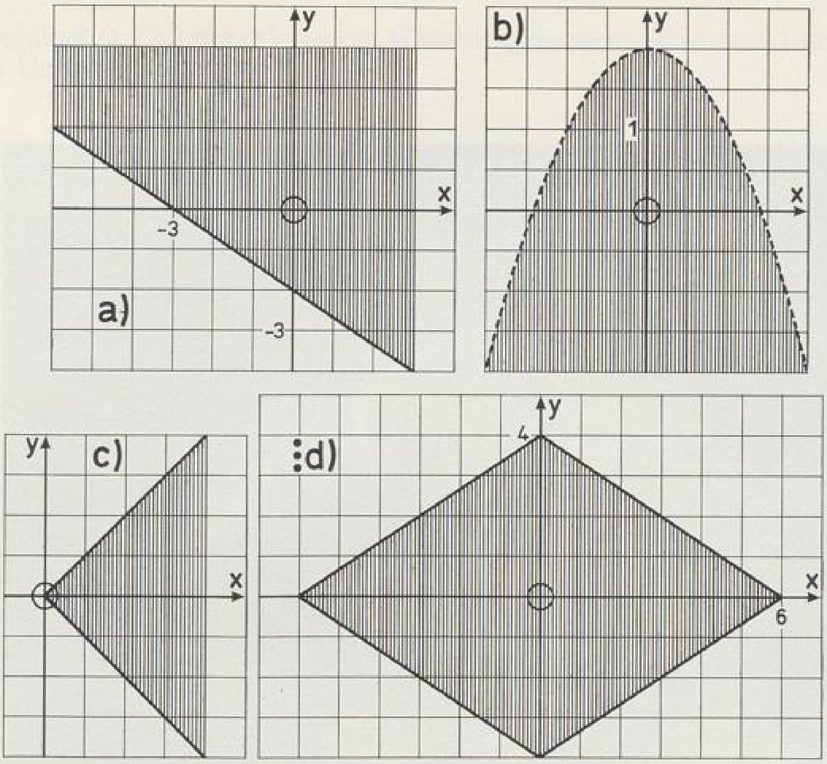
6. Beschreibe die Punktmengen durch Koordinatengleichungen:



⁝ 7. Beschreibe die Punktmengen durch Koordinatengleichungen:



8. Beschreibe die Punktmengen durch Koordinatenungleichungen:



9. Berechne die Schnittpunkte der Geraden:

a) g: $y = 2x$ h: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$	**b)** g: $3x - 2y = 5$ h: $x = 3$	**c)** g: $y - 2 = 0$ h: $x = -2y + 4$
d) g: $x - \pi = 0$ h: $y + \pi = 0$	**e)** g: $2x - 6y = 0$ h: $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$	**f)** g: $y = \frac{2}{3}x - 2$ h: $x = \frac{3}{2}y + 3$

10. DELISCHES PROBLEM

Die Bewohner der griechischen Insel Delos sollten zur Abwendung der Pest nach einem Orakelspruch Apollon einen würfelförmigen Altar bauen, dessen Volumen doppelt so groß werden sollte wie das des vorhandenen Altarwürfels. Weil sie die Kante des neuen Würfels nicht konstruieren konnten, fragten sie PLATON um Rat, und er antwortete ihnen: Apollon braucht einen so großen Altar gar nicht, er wollte euch nur zeigen, daß ihr euch zu wenig um Mathematik kümmert und nichts von Geometrie haltet!

Wir wissen heute, daß diese Aufgabe mit Zirkel und Lineal nicht lösbar ist. Die neue Kante müßte nämlich $\sqrt[3]{2}$ mal so lang sein wie die alte, aber eine Strecke der Länge $\sqrt[3]{2}$ ist nicht konstruierbar. Der griechische Mathematiker MENAICHMOS (4.Jh.v.Chr.) fand zwar eine Konstruktion mithilfe von Parabeln, doch als exakte Lösung im Sinn der klassischen Geometrie wurde sie natürlich nicht anerkannt.

Zeichne die Parabeln p: $x = \frac{1}{2}y^2$ und q: $y = x^2$ und berechne ihre Schnittpunkte.

Wieso ist damit das Delische Problem erledigt?