Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

2.1 Addieren und Subtrahieren gleichnamiger Bruchterme

urn:nbn:de:hbz:466:1-83513

2 Rechnen mit Bruchtermen

2.1 Addieren und Subtrahieren gleichnamiger Bruchterme

Vom Rechnen mit Zahlen kennen wir die Regel, dass gleichnamige Brüche addiert bzw. subtrahiert werden, indem man ihre Zähler addiert bzw. subtrahiert und den Nenner beibehält. So ist z. B.

$$\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=\frac{3+5}{7}=\frac{8}{7} \quad \text{bzw.} \quad \frac{3}{7}-\frac{5}{7}=\frac{3-5}{7}=\frac{-2}{7}=-\frac{2}{7}.$$

Aus diesem Grunde ergeben die Terme $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ und $\frac{a+b}{c}$ bei jeder Einsetzung den gleichen Zahlenwert. Also sind sie äquivalent. Damit wissen wir, wie man gleichnamige Bruchterme addiert:

> **Satz 34.1:** Gleichnamige Bruchterme werden addiert, indem man die Zähler addiert und den Nenner beibehält; kurz:
>
> $$\boldsymbol{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}}.$$

Beispiel:
$$\frac{4a^2-6ab}{4a^2-b^2}+\frac{b^2+2ab}{4a^2-b^2}=\frac{(4a^2-6ab)+(b^2+2ab)}{4a^2-b^2}=$$
$$=\frac{4a^2-4ab+b^2}{4a^2-b^2}=$$
$$=\frac{(2a-b)^2}{(2a-b)(2a+b)}=$$
$$=\frac{2a-b}{2a+b}.$$

Auch bei der Subtraktion gleichnamiger Bruchterme ergeben die Terme $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$ und $\frac{a-b}{c}$ nach dem obigen bei jeder Einsetzung den gleichen Zahlenwert. Sie sind also äquivalent und es gilt

> **Satz 34.2:** Gleichnamige Bruchterme werden voneinander subtrahiert, indem man die Zähler voneinander subtrahiert und den Nenner beibehält; kurz
>
> $$\boldsymbol{\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}}$$

Beachte: Da der Bruchstrich eine Klammer ersetzt, muss der Zähler des Minuenden, falls er ein Aggregat ist, *unbedingt* in eine Klammer gesetzt werden, wenn die beiden Zähler auf den gemeinsamen Bruchstrich kommen.

Beispiel:
$$\begin{aligned}\frac{3x^2-6}{x^2+x}-\frac{x^2-4x-8}{x^2+x}&=\frac{(3x^2-6)-(x^2-4x-8)}{x^2+x}=\\&=\frac{3x^2-6-x^2+4x+8}{x^2+x}=\\&=\frac{2x^2+4x+2}{x^2+x}=\\&=\frac{2(x^2+2x+1)}{x^2+x}=\\&=\frac{2(x+1)^2}{x(x+1)}=\\&=\frac{2(x+1)}{x}.\end{aligned}$$

Sind mehr als zwei Bruchterme durch Plus- und Minuszeichen miteinander verknüpft, so erhält man ein Aggregat von Bruchtermen, für das die dir bekannten Regeln über das Rechnen mit Aggregaten gelten. Speziell für Aggregate aus gleichnamigen Bruchtermen gilt

Satz 35.1: Ein Aggregat von gleichnamigen Bruchtermen wird berechnet, indem man den Nenner beibehält und in den Zähler das entsprechende Aggregat aus den Zählern der einzelnen Glieder setzt.

Beispiel:
$$\begin{aligned}\frac{3r+s}{r^2-s^2}-\frac{7-2r}{r^2-s^2}+\frac{4s+7}{r^2-s^2}&=\frac{(3r+s)-(7-2r)+(4s+7)}{r^2-s^2}=\\&=\frac{3r+s-7+2r+4s+7}{r^2-s^2}=\\&=\frac{5r+5s}{r^2-s^2}=\\&=\frac{5(r+s)}{(r+s)(r-s)}=\\&=\frac{5}{r-s}.\end{aligned}$$

Aufgaben

1. a) $\frac{7a}{5x}+\frac{9a}{5x}-\frac{6a}{5x}$ **b)** $\frac{13a}{7b}-\frac{17a}{7b}+\frac{19a}{7b}-\frac{11a}{7b}$

c) $\frac{2a-3b}{5}+\frac{5a-6b}{5}-\frac{4b-3a}{5}-\frac{2b}{5}$

d) $\frac{7x-9y}{18}-\frac{12x-13y}{18}-\frac{14x+15y}{18}+\frac{x-7y}{18}$

e) $\frac{5m-6n}{13}+\frac{8n-9m}{13}-\frac{7n-6m}{13}+\frac{5n-2m}{13}$

f) $\frac{2a^2+3ab}{a+b}-\frac{3a^2+2ab}{a+b}-\frac{a^2+3b^2}{a+b}+\frac{5a^2+ab+2b^2}{a+b}$

g) $\frac{x^2+4xy+y^2}{x-y}-\frac{3xy-2x^2+4y^2}{x-y}-\frac{2y^2+2x^2-3xy}{x-y}$

h) $\frac{5a^2+2ab-3b^2}{a^2-b^2}-\frac{3a^2-5ab+b^2}{a^2-b^2}+\frac{a^2-ab+7b^2}{a^2-b^2}$

i) $\frac{2x^2-4xy+5y^2}{x^2-y^2}-\frac{7xy-4x^2+3y^2}{x^2-y^2}-\frac{5x^2-9xy+y^2}{x^2-y^2}$

2. a) $\frac{(a+b)^2}{2ab}-\frac{(a-b)^2}{2ab}$

b) $\frac{(3p-2q)^2}{2pq}-\frac{(5p+3q)^2}{2pq}-\frac{(5q-4p)(4p-q)}{2pq}$

c) $\frac{(5r-8s)^2}{12rs}-\frac{(3r+10s)^2}{12rs}+\frac{(4r+6s)^2}{12rs}$

d) $\frac{(7a-8b)(5a+2b)}{4a-5b}-\frac{(2a-b)(5a-4b)}{4a-5b}-\frac{(9a+b)(a+5b)-59ab}{4a-5b}$

e) $\frac{(5x+4y)(2x-3y)}{x^2-4y^2}-\frac{(4x-3y)^2}{x^2-4y^2}-\frac{(2x-5y)(2x+5y)}{x^2-4y^2}+$

$+\frac{11x^2-13xy}{x^2-4y^2}$

•3. a) $\frac{(6a-5b)^2}{7\ \ +3b}-\frac{15ab-11b^2}{7a+3b}+\frac{(4a-3b)(a+17b)}{7a+3b}+$

$+\frac{9a^2+10ab+6b^2}{7a+3b}$

b) $\frac{(2x-3y)^2}{3x-8y} - \frac{(5x+7y)(3x-y)}{3x-8y} + \frac{(4x-3y)(5x-9y)}{3x-8y} + \frac{21y^2+31xy}{3x-8y}$

c) $\frac{(u+4v)^2}{5u-6v} + \frac{(2u-5v)^2}{5u-6v} - \frac{(2u-7v)(3v-5u)}{5u-6v} - \frac{110v^2-75uv}{5u-6v}$

d) $\frac{(4r-3s)^2}{4r-7s} - \frac{(2r-7s)(3s-8r)}{4r-7s} + \frac{9s(2r-s)}{4r-7s}$

•4. a) $\frac{(x+1)(x+2)(x-1)}{x-3} - \frac{2(x+2)(x+1)(x-2)}{x-3} + \frac{x^3-6x-9}{x-3}$

b) $\frac{(a+5)(a+3)(a-2)}{2a+3} - \frac{(a-3)^2(a+4)}{2a+3} -$

$- \frac{(a+2)^3-a^2(a-2)-71}{2a+3}$

c) $\frac{(3x+4y)(2x-y)(2x+3y)}{6y^2} - \frac{(x+3y)(3x-2y)(2x+y)}{6y^2} -$

$- \frac{x^2(6x+11y)}{6y^2}$

d) $\frac{(2p-3q)(p-4q)(4p-5q)}{3pq} + \frac{(4p-3q)(5p-2q)(p+10q)}{3pq} -$

$- \frac{4p(5q^2+7p^2)}{3pq}$

2.2 Addieren und Subtrahieren ungleichnamiger Bruchterme

Genauso wie bei Zahlen kann man ungleichnamige Bruchterme addieren bzw. subtrahieren, nachdem man sie mithilfe des Hauptnenners gleichnamig gemacht hat. Wir merken uns

> **Satz 37.1:** Ungleichnamige Bruchterme werden addiert bzw. subtrahiert, indem man sie gleichnamig macht und dann die Sätze für gleichnamige Bruchterme anwendet.
> Ebenso stellt man aus einem Aggregat ungleichnamiger Bruchterme zuerst ein Aggregat gleichnamiger Bruchterme her und berechnet dann dieses.

Beispiele:

1) $\frac{a+2b}{a^2+2ab+b^2} - \frac{2}{3a+3b}$