



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

2.2 Addieren und Subtrahieren ungleichnamiger Bruchterme

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83513](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83513)

$$\text{b) } \frac{(2x-3y)^2}{3x-8y} - \frac{(5x+7y)(3x-y)}{3x-8y} + \frac{(4x-3y)(5x-9y)}{3x-8y} + \frac{21y^2+31xy}{3x-8y}$$

$$\text{c) } \frac{(u+4v)^2}{5u-6v} + \frac{(2u-5v)^2}{5u-6v} - \frac{(2u-7v)(3v-5u)}{5u-6v} - \frac{110v^2-75uv}{5u-6v}$$

$$\text{d) } \frac{(4r-3s)^2}{4r-7s} - \frac{(2r-7s)(3s-8r)}{4r-7s} + \frac{9s(2r-s)}{4r-7s}$$

$$\text{4. a) } \frac{(x+1)(x+2)(x-1)}{x-3} - \frac{2(x+2)(x+1)(x-2)}{x-3} + \frac{x^3-6x-9}{x-3}$$

$$\text{b) } \frac{(a+5)(a+3)(a-2)}{2a+3} - \frac{(a-3)^2(a+4)}{2a+3} - \frac{(a+2)^3 - a^2(a-2) - 71}{2a+3}$$

$$\text{c) } \frac{(3x+4y)(2x-y)(2x+3y)}{6y^2} - \frac{(x+3y)(3x-2y)(2x+y)}{6y^2} - \frac{x^2(6x+11y)}{6y^2}$$

$$\text{d) } \frac{(2p-3q)(p-4q)(4p-5q)}{3pq} + \frac{(4p-3q)(5p-2q)(p+10q)}{3pq} - \frac{4p(5q^2+7p^2)}{3pq}$$

2.2 Addieren und Subtrahieren ungleichnamiger Bruchterme

Genauso wie bei Zahlen kann man ungleichnamige Bruchterme addieren bzw. subtrahieren, nachdem man sie mithilfe des Hauptnenners gleichnamig gemacht hat. Wir merken uns

Satz 37.1: Ungleichnamige Bruchterme werden addiert bzw. subtrahiert, indem man sie gleichnamig macht und dann die Sätze für gleichnamige Bruchterme anwendet. Ebenso stellt man aus einem Aggregat ungleichnamiger Bruchterme zuerst ein Aggregat gleichnamiger Bruchterme her und berechnet dann dieses.

Beispiele:

$$1) \frac{a+2b}{a^2+2ab+b^2} - \frac{2}{3a+3b}$$

Wir bilden unter Angabe der Erweiterungsfaktoren EF den Hauptnenner HN:

$$\begin{array}{rcl} a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 & \parallel & \text{EF} \\ 3a + 3b = 3(a+b) & \parallel & 3 \\ & \parallel & (a+b) \end{array}$$

$$\text{HN} = 3(a+b)^2$$

$$\begin{aligned} \text{Also } \frac{a+2b}{a^2+2ab+b^2} - \frac{2}{3a+3b} &= \frac{3(a+2b)}{3(a+b)^2} - \frac{2(a+b)}{3(a+b)^2} = \\ &= \frac{3(a+2b) - 2(a+b)}{3(a+b)^2} = \\ &= \frac{3a+6b-2a-2b}{3(a+b)^2} = \\ &= \frac{a+4b}{3(a+b)^2}. \end{aligned}$$

$$2) \frac{1}{2x^3+4x^2} + \frac{2}{15-3x} - \frac{15-19x-8x^2}{12x^3-36x^2-120x}$$

Wir bilden durch Faktorisieren den Hauptnenner und multiplizieren die Erweiterungsfaktoren EF so weit wie möglich aus:

$$\begin{array}{rcl} 2x^3 + 4x^2 = 2x^2(x+2) & \parallel & \text{EF} \\ 15 - 3x = 3(5-x) & \parallel & 2 \cdot 3(x-5) = 6x-30 \\ 12x^3 - 36x^2 - 120x = 12x(x^2-3x-10) = & \parallel & -2^2 x^2(x+2) = -4x^3-8x^2 \\ & \parallel & = 2^2 \cdot 3x(x+2)(x-5) \end{array}$$

$$\text{HN} = 2^2 \cdot 3 \cdot x^2(x+2)(x-5)$$

Beim Zusammenfassen der gleichnamig gemachten Brüche ersparen wir uns viel Schreibarbeit, wenn wir für den Hauptnennerterm, solange wir nur im Zähler rechnen, einfach kurz HN schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x^3+4x^2} + \frac{2}{15-3x} - \frac{15-19x-8x^2}{12x^3-36x^2-120x} &= \\ &= \frac{1 \cdot (6x-30) + 2 \cdot (-4x^3-8x^2) - (15-19x-8x^2) \cdot x}{\text{HN}} = \\ &= \frac{6x-30-8x^3-16x^2-15x+19x^2+8x^3}{\text{HN}} = \\ &= \frac{3x^2-9x-30}{\text{HN}} = \frac{3(x^2-3x-10)}{2^2 \cdot 3 \cdot x^2(x+2)(x-5)} = \\ &= \frac{(x+2)(x-5)}{2^2 \cdot x^2(x+2)(x-5)} = \frac{1}{4x^2}. \end{aligned}$$

Nun weißt du, wie du Aggregate aus Bruchtermen berechnen kannst. Was machst du aber mit dem Term $3x + \frac{6x}{7x-2}$? Wir erinnern uns, dass man jede Zahl als Bruch mit dem Nenner 1 schreiben kann, z. B. $5 = \frac{5}{1}$. Genauso kann man jeden Nicht-Bruchterm als Bruchterm mit dem Nenner 1 schreiben. Machen wir's!

$$\begin{aligned} 3x + \frac{6x}{7x-2} &= \frac{3x}{1} + \frac{6x}{7x-2} = \frac{3x(7x-2) + 6x \cdot 1}{7x-2} = \\ &= \frac{21x^2 - 6x + 6x}{7x-2} = \frac{21x^2}{7x-2} \end{aligned}$$

Aufgaben

1. a) $\frac{a}{10} + \frac{2a}{5}$ b) $\frac{5p}{9} - \frac{3p}{4}$ c) $\frac{a}{5} - \frac{b}{3}$ d) $\frac{3p}{14} + \frac{11q}{21}$
2. a) $\frac{7}{a} + \frac{3}{b}$ b) $\frac{6}{a} - \frac{2}{3a}$ c) $\frac{11}{8m} + \frac{3}{4n}$ d) $\frac{-1}{7z} + \frac{27}{196z}$
3. a) $\frac{6n}{7m} - \frac{5}{4m}$ b) $\frac{11u}{13vw} - \frac{8u}{3vw}$ c) $\frac{7b}{a^2} + \frac{3}{b}$ d) $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$
4. a) $\frac{b^2+1}{3a^2} + \frac{a}{6b}$ b) $\frac{4a+b}{16a^2b} + \frac{a-3b}{12ab^2}$
 c) $\frac{7y-1}{x^2} - \frac{1}{4x^4}$ d) $\frac{2m+1}{4m^2n} - \frac{3n^2-m}{6mn^3}$
5. a) $1 + \frac{a}{b}$ b) $a - \frac{b}{a}$ c) $\frac{1}{x^2} - x$ d) $\frac{w^2}{u^2v} + v$
6. a) $\frac{a^2+b^2}{ab} + 2$ b) $\frac{c^2+d^2}{cd} - 2$ c) $\frac{(m+n)^2}{4mn} - 1$ d) $\frac{(x-y)^2}{4} + xy$
7. a) $\frac{(a+b)^2}{a-b} - (a-b)$ b) $\frac{(x-y)^2}{x+y} + (x+y)$ c) $\frac{(u+v)^2}{u-v} + (u+v)$
8. a) $\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a-b}$ b) $\frac{3a}{4a-1} - \frac{2b+1}{3b}$ c) $\frac{3x-1}{2x^2-xy} - \frac{3y-2}{2xy-y^2}$
9. a) $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}$ b) $\frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y}$
 c) $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}$ d) $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}$
10. a) $\frac{3a+5b}{2a+3b} - \frac{2a-3b}{3a-5b}$ b) $\frac{4u-7v}{6u-v} + \frac{6u+v}{4u+7v}$

$$11. \text{ a) } \frac{4a-5b}{6a+7b} - \frac{5b+4a}{6a-7b}$$

$$\text{b) } \frac{2a(a-b)}{a^2-2ab+b^2} - \frac{a+b}{a-b}$$

$$12. \text{ a) } \frac{2a}{9} - \frac{b}{9} + \frac{4c}{9}$$

$$\text{b) } \frac{-7m}{23} + \frac{3n}{-23} - \frac{8m-n}{23}$$

$$\text{c) } \frac{5p}{18} + \frac{-3q}{45} + \frac{4}{21}$$

$$\text{d) } \frac{a-b}{16} - \frac{2a+b}{36} + \frac{-a+b}{-24}$$

$$13. \text{ a) } \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{a+b}{ab}$$

$$\text{b) } \frac{m-2}{2m} + \frac{1}{3mn} + \frac{3n+2}{-6n}$$

$$\text{c) } \frac{a^2+3b}{a^2b} + \frac{1-3a}{3ab} - \frac{5b-3}{5b^2}$$

$$\text{d) } \frac{3x-1}{7x^3y} - \frac{x^2+y}{2x^2y^2} + \frac{y^2-1}{3y^4}$$

$$14. \text{ a) } \frac{4x-3y}{a+b} - \frac{6x-5y}{2a+2b} + \frac{2y-3x}{3a+3b}$$

$$\text{b) } \frac{3z-1}{15a-9} + \frac{1-4z}{20a-12} + \frac{-3}{21-35a}$$

$$\bullet 15. \text{ a) } \frac{4p-7q}{7m-4n} + \frac{p+5q}{-7m-4n} - \frac{3p+q}{7m+4n}$$

$$\text{b) } \frac{3a-b}{x-2y} - \frac{4a+b}{2y-x} + \frac{2a-b}{2x-y}$$

$$\bullet 16. \text{ a) } \frac{1}{4p-7q} + \frac{49q}{21pq-12p^2} - \frac{8p+3q}{12pq-21q^2}$$

$$\text{b) } \frac{3}{32yz^2+28y^2} - \frac{4}{-24z^3-21yz} - \frac{y^2+z^2}{8y^2z^3+7y^3z}$$

$$17. \text{ a) } \frac{4a+1}{4a+7} - \frac{7}{16a^2-49}$$

$$\text{b) } \frac{x}{45x^2-5} + \frac{3x+1}{3x-1}$$

$$18. \text{ a) } \frac{x+b}{a^2-b^2} - \frac{x+b}{a^2-ab}$$

$$\bullet \text{ b) } \frac{5m+2n}{125m^2-20n^2} - \frac{4m-5n}{16m^2-20mn}$$

$$19. \text{ a) } \frac{3}{24x-4} - \frac{6x-1,25}{36x^2-12x+1}$$

$$\text{b) } \frac{z+4}{8+40z+50z^2} + \frac{1}{-22-55z}$$

$$20. \text{ a) } \frac{-13x}{y^2-26yz+169z^2} + \frac{13x}{169z^2-13yz}$$

$$\text{b) } \frac{3a-b}{243a^2-3b^2} + \frac{b-3a}{27ab-3b^2}$$

$$21. \text{ a) } \frac{5s+7}{t^2-4t+4} - \frac{6s-7}{4-t^2}$$

$$\text{b) } \frac{5r+12s}{4r^2-64s^2} - \frac{r-4s}{-r^2-8rs-16s^2}$$

$$22. \text{ a) } \frac{x}{2x-6} - \frac{x^2}{x^2-4x+3}$$

$$\text{b) } \frac{y}{2y^2+4y-6} + \frac{1}{y-1}$$

$$23. \text{ a) } \frac{2a^2-a+21}{12a^2-27} + \frac{2a-7}{6a-9} - 1$$

$$\text{b) } \frac{m^2}{m^2-4n^2} - \frac{7m+4n}{10m+20n} + \frac{1}{5}$$

$$24. \text{ a) } 5 - \frac{5x+9}{x+2} + \frac{8}{x^4-16}$$

$$\text{b) } \frac{16y^4+60y+9}{16y^4-81} + \frac{5}{4y^2+9} - 1$$

$$25. \text{ a) } \frac{a^2}{16a^2 + 40ab + 25b^2} - \frac{31a^2 - 50b^2}{16a^2 - 25b^2} + 2$$

$$\text{ b) } \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2} + \frac{a^2 - 2ab - b^2}{ab} + \frac{a^2 - ab + b^2}{b^2} - 2$$

$$26. \text{ a) } \frac{1}{a} - \frac{2}{b} - \frac{5a - 12b}{a^2 - 4ab + 4b^2}$$

$$\text{ b) } \frac{1}{2x} + \frac{2x - 3y}{4x^2 + 12xy + 9y^2} - \frac{1}{3y}$$

$$27. \text{ a) } \frac{m-1}{m^2} - \frac{4}{6m-4} + \frac{15m}{4-9m^2}$$

$$\text{ b) } \frac{u+5v}{uv} - \frac{10u}{u^2 - 25v^2} + \frac{5}{u-5v}$$

$$28. \text{ a) } \frac{8x^2 - 0,5a}{2x^2 - ax} - \frac{7x + 0,5a - 1}{2x - a} + \frac{x-1}{2x}$$

$$\text{ b) } \frac{6m^2 + 9}{7m^3 - 63m} + \frac{m}{9 - m^2} + \frac{1}{7m}$$

$$29. \text{ a) } \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2+b} - \frac{b^2}{4-b^2}$$

$$\text{ b) } \frac{x-a}{5x+3} - \frac{x+a}{5x-3} + \frac{(4a+6)x}{25x^2-9}$$

$$30. \text{ a) } \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

$$\text{ b) } \frac{2a-3b}{2a+3b} - \frac{2a+3b}{2a-3b} + \frac{8a^2+18b^2}{4a^2-9b^2}$$

$$\text{ c) } \frac{3p+4q}{3p-4q} + \frac{3p-4q}{3p+4q} - \frac{48pq}{9p^2-16q^2}$$

$$\text{ d) } \frac{2(4a-b)}{4a+b} - \frac{3(4a+b)}{4a-b} + \frac{32a^2+32ab+2b^2}{16a^2-b^2}$$

$$\text{ e) } \frac{5(2x-3y)}{4x-5y} - \frac{4(2x+3y)}{4x+5y} - \frac{4x^2-25xy}{16x^2-25y^2}$$

$$\text{ f) } \frac{-3a+4}{4a-32} - \frac{2a-1}{6a+48} - \frac{64-64a-26a^2}{24a^2-1536}$$

$$31. \text{ a) } \frac{2(3m+4n)}{6m+9n} - \frac{2,5m-n}{10m-15n} - \frac{3m^2-1,5mn-7n^2}{4m^2-9n^2}$$

$$\text{ b) } \frac{a}{(a+b)^2} - \frac{b}{(a-b)^2} + \frac{2b}{a^2-b^2} - \frac{1}{a+b} + \frac{a^3-3a^2b+3ab^2+3b^3}{(a^2-b^2)^2}$$

$$\text{ c) } \frac{a}{a+b-c} - \frac{b}{a-b+c} + \frac{2ab-c(a+b)}{a^2-(b-c)^2}$$

$$32. \text{ a) } \frac{6x+1}{4x-6} + \frac{8x-3}{6x+9} - \frac{20x^2-4x+9}{8x^2-18}$$

$$\text{ b) } \frac{4-5y}{4+5y} + \frac{4+5y}{5y-4} - \frac{12-145y}{32-50y^2}$$

$$\bullet 33. \text{ a) } \frac{12a+5b}{0,9a+0,6b} + \frac{9a+4b}{0,6a+0,4b} - \frac{2(27a^2+33ab-4b^2)}{2,7a^2-1,2b^2}$$

$$\text{ b) } \frac{3a^2+6ab}{15a-20b} - \frac{ab}{3a-4b} - \frac{5ab-4b^2}{6a-8b} - \frac{5a-14b}{30}$$

$$34. \text{ a) } \frac{3a-b}{3x-6y} + \frac{4a-b}{-4x+8y} + \frac{b(x+y)}{2x^2-8y^2}$$

$$\text{ b) } \frac{3z}{6u+12v} - \frac{y+2z}{4u+8v} + \frac{y}{(2u+4v)^2}$$

$$35. \text{ a) } \frac{22x^2-27x-49}{735-15x^2} - \frac{-2x+4}{3x-21} + \frac{4x-1}{5x+35}$$

$$\text{ b) } \frac{2a-3b}{4a^2+2ab} - \frac{6a+4b}{6ab+3b^2} + \frac{5a+8b}{6ab} - \frac{8a-b}{8a^2+4ab}$$

$$36. \text{ a) } \frac{a^4+1}{a^4-1} + \frac{a^2+1}{a^2-1} - \frac{a+1}{a-1} \quad \text{ b) } \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x}$$

$$\bullet 37. \text{ a) } \frac{3ab}{9a^2-b^2} + \frac{a+b}{2b-6a} + \frac{3a^2-4ab-b^2}{18a^2-2b^2}$$

$$\text{ b) } \frac{3a-5b}{6a^2-9ab} - \frac{2a+7b}{4ab+6b^2} - \frac{5ab-15b^2}{12a^3-27ab^2} + \frac{4a^2-23b^2}{8a^2b-18b^3}$$

$$\bullet 38. \text{ a) } \frac{-2x+3}{3x+9} - \frac{11x^2+51x-54}{6x^2-54} - \frac{11x-12}{x^2-9}$$

$$\text{ b) } \frac{7x+2y}{6xy-2y^2} - \frac{3x-4y}{9x^2+3xy} - \frac{6x^2-4y^2}{27x^3-3xy^2} - \frac{6x^2+7y^2}{9x^2y-y^3}$$

$$39. \text{ a) } \frac{2}{x+1} - \frac{x-3}{x^2-1} - \frac{x}{x^2-2x+1} \quad \text{ b) } \frac{1}{3y-2z} - \frac{24y}{36y^2-16z^2} + \frac{2z}{(3y+2z)^2}$$

$$\bullet 40. \text{ a) } \frac{1}{3a-4b} + \frac{2a-b}{-9a^2+24ab-16b^2} - \frac{a-3b}{9a^2+24ab+16b^2}$$

$$\text{ b) } \frac{4a^2}{6ab+9b^2} - \frac{2a}{3b} + \frac{3b}{2a} - \frac{9b^2}{4a^2+6ab}$$

$$\bullet 41. \text{ a) } \frac{m}{2n} + \frac{m^2}{m^2-2mn+n^2} - \frac{m(m^2+n^2)}{2m^2n-4mn^2+2n^3}$$

$$\text{ b) } \frac{4a^2}{10ab-25b^2} + \frac{25b^2}{4a^2-10ab} - \frac{2a}{5b} + \frac{5b}{2a}$$

$$\bullet 42. \frac{x-y}{3ax-2by+3ay-2bx} + \frac{1}{3a-2b} - \frac{x}{x^2-y^2}$$

$$\bullet 43. \frac{ax-a}{2ax+2x-a-1} + \frac{2ax^2+ax}{4ax^2+4x^2-a-1} - 1$$

$$\bullet 44. \frac{2a-3b}{6ab} + \frac{3}{4a-6b} - \frac{2b}{6a^2-9ab} - \frac{3a}{8ab-12b^2} + \frac{5a^2+6ab-19b^2}{24a^2b-36ab^2}$$

$$45. \frac{2}{x^2-1} - \frac{3}{x^2+x-2} + \frac{1}{x^2+3x+2}$$

$$46. \frac{1}{x^2-6x+9} + \frac{1}{x^2+8x+16} - \frac{2}{x^2+x-12}$$

$$\bullet 47. \frac{x^2+y^2}{2xy} - \frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y} + \frac{y^4-x^4+4x^3y}{2(x^3y-xy^3)}$$

$$\bullet 48. \frac{p}{p-q} - \frac{q^2}{p^2+pq+q^2} - \frac{p^2q}{p^3-q^3} \quad \bullet 49. \frac{1}{x+y} + \frac{x-y}{x^2-xy+y^2} - \frac{x(x-y)}{x^3+y^3}$$

$$\bullet 50. \frac{5}{4x^2-4x+1} - \frac{2}{4x^2+4x+1} + \frac{4x^2-28x-7}{16x^4-8x^2+1}$$

$$\bullet 51. \frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} + \frac{a-b}{a^2+2ab+b^2} - \frac{2a-b}{a^2-b^2} - \frac{4(ab^2-b^3)}{(a^2-b^2)^2}$$

$$\bullet 52. \frac{x^2}{4x^2-4xy+y^2} - \frac{y^2}{4x^2+4xy+y^2} - \frac{x^2+y^2}{4x^2-y^2} + \frac{xy(6xy-5y^2)}{(4x^2-y^2)^2}$$

$$\bullet 53. \frac{7a^2-4b^2}{a^2+6ab+9b^2} - \frac{5a^2-9ab}{a^2-6ab+9b^2} - \frac{2a^2-3ab+4b^2}{a^2-9b^2} + \frac{462ab^3-82a^2b^2}{a^4-18a^2b^2+81b^4}$$

$$\bullet 54. \frac{2a-3b}{a^2+2ab+b^2} - \frac{2a+3b}{a^2-2ab+b^2} + \frac{10a^3+10a^2b}{a^4-2a^2b^2+b^4} - \frac{6b}{a^2-b^2}$$

$$\bullet 55. \frac{2x-1}{4x^2+4x+1} - \frac{2x+1}{4x^2-4x+1} + \frac{4x^2+7}{16x^4-8x^2+1}$$

$$\bullet 56. \frac{a}{a^2+3ab+2b^2} + \frac{b}{a^2+4ab+3b^2} - \frac{a+b}{a^2+5ab+6b^2}$$

$$\bullet 57. \text{ a) } \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

$$\text{ b) } \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

$$\text{ c) } \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$\text{ d) } \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$