



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

2.3 Multiplizieren von Bruchtermen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83513](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83513)

2.3 Multiplizieren von Bruchtermen

Vom Rechnen mit Zahlen kennen wir die Regel, dass Brüche miteinander multipliziert werden, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert. So ist z. B. $\frac{3}{7} \cdot \frac{8}{13} = \frac{3 \cdot 8}{7 \cdot 13} = \frac{24}{91}$.

Aus diesem Grund ergeben die Terme $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ und $\frac{ac}{bd}$ bei jeder Einsetzung denselben Zahlenwert. Also sind sie äquivalent. Damit wissen wir, wie man Bruchterme miteinander multipliziert:

Satz 44.1: Bruchterme werden miteinander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert; kurz:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Beachte: 1) Produkte sind meist bequemer zu verarbeiten als Summen, deshalb multiplizieren wir nicht aus, sondern versuchen im Gegenteil so weit wie möglich zu faktorisieren, um gegebenenfalls kürzen zu können.

Übrigbleibende Zahlenfaktoren multiplizieren wir aus.

2) Vergiss die Klammern nicht, wenn du *einen* Bruchstrich machst.

Beispiel:

$$\begin{aligned} & \frac{10x^2 - 60x + 90}{x^2 - 4} \cdot \frac{4x^2 + 4x - 8}{5x - 15} = \\ &= \frac{10(x^2 - 6x + 9) \cdot 4(x^2 + x - 2)}{(x^2 - 4) \cdot 5(x - 3)} = \frac{10 \cdot 4(x - 3)^2(x + 2)(x - 1)}{5(x - 2)(x + 2)(x - 3)} = \\ &= \frac{2 \cdot 4(x - 3)(x - 1)}{x - 2} = \frac{8(x - 3)(x - 1)}{x - 2}. \end{aligned}$$

Nun weißt du, wie du Bruchterme miteinander multiplizieren kannst.

Was machst du aber mit dem Produkt $12x \cdot \frac{1+x}{6x^2-18x}$?

Wir schreiben $12x$ als Bruchterm $\frac{12x}{1}$ und wenden Satz 44.1 an:

$$12x \cdot \frac{1+x}{6x^2-18x} = \frac{12x}{1} \cdot \frac{1+x}{6x^2-18x} = \frac{12x(1+x)}{1 \cdot (6x^2-18x)} = \frac{12x(1+x)}{6x(x-3)} = \frac{2(x+1)}{x-3}$$

Es gilt also

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$$

Aufgaben

1. a) $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$ b) $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}$ c) $\frac{7p}{3q} \cdot \frac{2p}{5q}$ d) $\frac{7p}{3q} \cdot \frac{2q}{5p}$
2. a) $\frac{64k}{25l} \cdot \frac{125}{128k}$ b) $\frac{121b}{91a} \cdot \frac{169c}{156d}$ c) $\frac{13x}{70yz} \cdot \frac{35y}{52x^2}$ d) $\frac{98m^2n}{39} \cdot \frac{65m}{147n^3}$
3. a) $\left(\frac{7ax}{13by}\right)^2$ b) $\frac{11m}{15n} \cdot \left(\frac{15n}{11m}\right)^2$ c) $\frac{(u^2v)^2}{w} \cdot \frac{w^2}{(uv)^3}$ d) $\frac{4ac}{3b^3d^2} \cdot \frac{(3ab^2d^2)^2}{10c^3}$
4. a) $\frac{5a}{3b} \cdot 7c$ b) $3mn \cdot \frac{14m}{11n}$ c) $16xy \cdot \frac{5y}{12}$ d) $\frac{13u^2}{12v^2} \cdot 4v^3$
5. a) $\frac{1}{a+b} \cdot (b+a)$ b) $(2p-q) \cdot \frac{2}{q-2p}$
- c) $\frac{5x}{3x-6y} \cdot (4x-8y)$ d) $(7ab-3b^2) \cdot \frac{b}{6b-14a}$
6. a) $\frac{a-b}{a+b} \cdot (a^2-b^2)$ b) $(a^2-b^2) \cdot \frac{a+b}{a-b}$ c) $\frac{a+b}{a-b} (a-b)^2$
- d) $\frac{a-b}{a+b} \cdot (b^2-a^2)$ e) $(b^2-a^2) \cdot \frac{a+b}{a-b}$ f) $\frac{a+b}{a-b} (b-a)^2$
7. a) $\frac{8-24z}{3x-y} \cdot \frac{18x-6y}{8z-24}$ b) $\frac{20m-12n}{55mn} \cdot \frac{22m^2n-33mn}{5m-3n}$
- c) $\frac{6uv-14v^2}{u^2+u} \cdot \frac{3u^2-3}{7v^2-3uv}$ d) $\frac{48a^2c-28ab}{28abc+24bc^2} \cdot \frac{21ac+18c^2}{14b^2-24abc}$
8. a) $\frac{3x-1}{x^2-4} \cdot \frac{2x+4}{9x^2-3x}$ b) $\frac{(5m-n)^2}{13mn} \cdot \frac{78m^2+39m}{25m^2-n^2}$
9. a) $\frac{36a^2-84ab+49b^2}{(3ab)^2} \cdot \frac{27(ab)^3}{14a^2-12ab}$
- b) $\frac{3(a+b)^2}{4x^2-y^2} \cdot \frac{4x+2y}{2ax-ay+2bx-by}$
- 10. a) $\frac{15x-5x^2}{x^2+x-6} \cdot \frac{4-x^2}{18-2x^2} \cdot \frac{2x^2+12x+18}{5x^2+10x}$
- b) $\frac{2x-5}{6x^2-x-12} \cdot \frac{3x+4}{8x^2-14x-15}$
- 11. a) $\frac{40x^2-29x+3}{9x+2} \cdot \frac{45x^2-17x-6}{8x-1}$
- b) $\frac{2a^2-5ab+3b^2}{3a^2+ab-2b^2} \cdot \frac{3a^2-5ab+2b^2}{2a^2-ab-3b^2}$

$$12. \text{ a) } \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{x}\right) \cdot 2x \quad \text{b) } \left(\frac{1}{m} - \frac{3}{2n}\right) \cdot \frac{mn}{3m-2n} \quad \text{c) } \left(\frac{6}{y} - \frac{3}{4z}\right) \cdot \frac{8yz}{8z-y}$$

$$13. \text{ a) } \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) \cdot \frac{x+y}{x-y} \quad \text{b) } (7z^5 - 5z^7) \left(\frac{7}{z^7} + \frac{5}{z^5}\right)$$

$$14. \text{ a) } x^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{b) } \frac{8u^2}{9u-30v} \cdot \left(\frac{5}{3uv} - \frac{1}{2v^2}\right) \cdot 18v$$

$$15. \text{ a) } \left(\frac{1}{p^2} + \frac{2}{pq} + \frac{1}{q^2}\right) \cdot \frac{pq}{p+q} \quad \text{b) } \left(\frac{1}{4} - \frac{n}{4m} - \frac{m}{16n}\right) \cdot \frac{2^4 mn}{m-2n}$$

$$16. \text{ a) } (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad \text{b) } \frac{1}{a+b} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$\text{c) } \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) (a-b) \quad \text{d) } \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{1}{a-b}$$

$$17. \text{ a) } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \quad \text{b) } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 \quad \text{c) } \left(\frac{2}{3x} - \frac{5}{7y}\right)^2$$

$$18. \text{ a) } \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{2}\right) \left(\frac{3}{a} - \frac{2}{b}\right) \quad \text{b) } \left(\frac{5}{2x} + \frac{2}{7y}\right) \left(\frac{2x}{7} - \frac{5y}{2}\right)$$

$$\bullet 19. \text{ a) } \left(\frac{u}{u+v} + \frac{v}{u-v}\right) \left(u - \frac{v^2}{u}\right) \quad \text{b) } \left(\frac{r}{4s} - \frac{s}{9r}\right) \left(\frac{s}{r} - \frac{3s}{3r+2s}\right)$$

$$\text{c) } \left(8x + \frac{9y^2}{2x-3y}\right) \left(\frac{12xy-4x^2}{4x-3y} - 3y\right) \quad \text{d) } \left(\frac{4q}{7p} - 2\right) \cdot \left(1 - \frac{21p^2}{20q^2}\right)$$

$$20. \text{ a) } \left(9x - \frac{15x}{14y}\right) \cdot \left(7y + \frac{28y}{27x}\right) \quad \text{b) } \left(\frac{12}{25}a + \frac{16a^2}{15b}\right) \cdot \left(\frac{35b^2}{8a} - 3\frac{3}{4}b\right)$$

$$\bullet 21. \text{ a) } \left(\frac{7c+d}{4c+3d} - 1\right) \left(4 + \frac{10d-13c}{4c-3d}\right) \quad \text{b) } \left(\frac{a-3b}{3a-9b} + \frac{a+2b}{2a-6b}\right)^2$$

$$\text{c) } \left(\frac{p}{2p+10q} + \frac{2,5q}{p+5q}\right) \left(\frac{p}{2p+10q} - \frac{2,5q}{p+5q}\right)$$

$$\text{d) } \left(\frac{a}{2b} + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3b} - \frac{3b}{4a}\right)^2$$

$$22. \text{ a) } \left(\frac{2a}{3b} - \frac{4b}{3a}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4b} - \frac{2b}{3a}\right)^2 \quad \text{b) } \left(\frac{p}{5q} + \frac{3q}{2p}\right)^2 - \left(\frac{2p}{3q} - \frac{5q}{2p}\right)^2$$

$$c) \left(\frac{2a}{3b} - \frac{3b}{4a} \right) \cdot \left(\frac{3a}{4b} - \frac{2b}{3a} \right) - \left(\frac{a}{3b} - \frac{b}{4a} \right) \cdot \left(\frac{a}{4b} - \frac{b}{6a} \right)$$

$$23. a) \left(\frac{x^2}{x^2 - y^2} + \frac{x}{x + y} - 1 \right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \quad b) \left(\frac{y^2}{x^2 - y^2} + \frac{x}{x - y} - 1 \right) \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y} \right)$$

$$24. a) \left(\frac{m}{3n} + \frac{3m + 11n}{6m - 3n} + 1 \right) \left(\frac{13m - 4n}{2m + 4n} - \frac{n}{m} + \frac{3}{2} \right)$$

$$b) \left(\frac{2x + 3y}{3x - 4y} - \frac{2x - 3y}{3x + 4y} \right) \cdot \frac{9x^2 - 16y^2}{4x^2 - 9y^2}$$

$$25. a) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) (1 + z + z^2) \quad b) \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right)$$

$$26. a) \left(\frac{x}{3} + \frac{x^2}{3x - 2y} - \frac{2xy}{9x - 6y} \right) \left(\frac{x}{3} - \frac{x^2}{3x - 2y} + \frac{2xy}{9x - 6y} \right)$$

$$b) \left(\frac{a^2}{x^2} + \frac{ab}{xy} + \frac{b^2}{y^2} \right) \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)$$

$$c) \left(\frac{x^3}{r^3} - \frac{2x^2}{r^2} + \frac{3x}{r} - 4 \right) \cdot \left(\frac{r^2}{x^2} + \frac{2r}{x} + 3 \right)$$

$$d) \left(\frac{2a^2x}{27b^2y} + \frac{4ay}{9bx} - \frac{8by^2}{3ax^2} \right) \cdot \left(\frac{3b^2y}{8a^2x} + \frac{9bx}{4ay} - \frac{27ax^2}{2by^2} \right)$$

$$27. a) \left(1 + \frac{1}{a^2} \right) \left(\frac{4ab}{a^2 - b^2} + \frac{a - b}{a + b} - \frac{a + b}{a - b} \right)$$

$$b) \left(\frac{a}{a - b} - \frac{b}{a + b} - \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \right) \left(\frac{3}{5a^2 + 1} + \frac{(1 - a)^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^4} \right)$$

$$c) \frac{x}{y} \cdot \left(\frac{2y^2 + 1}{xy} - \frac{y}{x} \right) \left(\frac{2x - y}{x - 1} + \frac{6x + y}{x + 3} + \frac{4y - 8x^2}{x^2 + 2x - 3} \right)$$

28. LEONARDO VON PISA, genannt FIBONACCI, (um 1170 – nach 1240) schreibt: Die Zahl a sei in zwei Teile [= Summanden] b, g geteilt. Man teile a durch b , das Ergebnis sei e ; und man teile a durch g , das Ergebnis sei d . Ich behaupte, dass das Produkt von d und e gleich der Summe von d und e ist. Zeige, dass LEONARDO Recht hat.