Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

2.4 Dividieren von Bruchtermen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83513

2.4 Dividieren von Bruchtermen

Vom Rechnen mit Zahlen kennen wir die Regel, dass durch einen Bruch dividiert wird, indem man mit seinem Kehrwert* multipliziert. So ist z. B.

$\frac{3}{7} : \frac{8}{13} = \frac{3}{7} \cdot \frac{13}{8} = \frac{3 \cdot 13}{7 \cdot 8} = \frac{39}{56}$.

Aus diesem Grund ergeben die Terme $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ und $\frac{ad}{bc}$ bei jeder Einsetzung denselben Zahlenwert. Also sind sie äquivalent. Damit wissen wir, wie man durch einen Bruchterm dividiert:

> **Satz 48.1:** Durch einen Bruchterm wird dividiert, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert; kurz:
>
> $$\boldsymbol{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{a : \frac{c}{d} = \frac{ad}{c}}.$$

Beispiele:

1) $$\frac{42(x-y)^2}{85(a^2-b^2)} : \frac{56(x^2-y^2)}{51(a+b)^2} = \frac{42(x-y)^2 \cdot 51(a+b)^2}{85(a-b)(a+b) \cdot 56(x-y)(x+y)} = \\ = \frac{3 \cdot 3(x-y)(a+b)}{5 \cdot 4(a-b)(x+y)} = \frac{9(x-y)(a+b)}{20(a-b)(x+y)}$$

2) $$25a^5 : \frac{15a^2}{4b^2} = 25a^5 \cdot \frac{4b^2}{15a^2} = \frac{25a^5 \cdot 4b^2}{15a^2} = \frac{5 \cdot 4a^3b^2}{3} = \frac{20a^3b^2}{3} = \\ = \tfrac{20}{3}\, a^3b^2$$

Weil jeder Term c als Bruchterm $\frac{c}{1}$ geschrieben werden kann, lässt sich Satz 48.1 auch auf Divisionen vom Typ $\frac{a}{b} : c$ anwenden. Es gilt also:

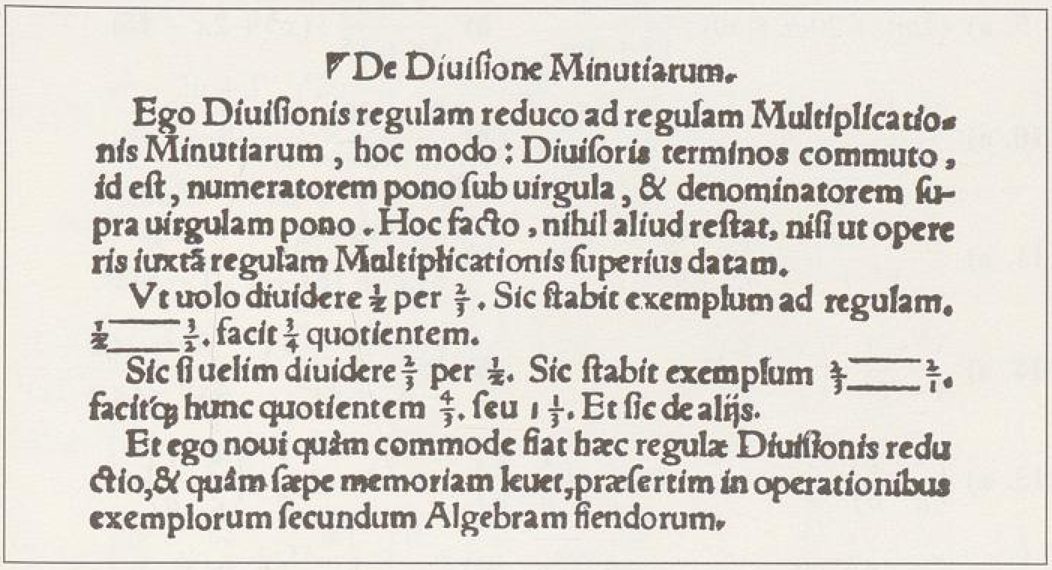
$$\boxed{\boldsymbol{\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}}}$$

Beispiel: $\frac{63uv}{41x} : (42uv^2) = \frac{63uv}{41x} \cdot \frac{1}{42uv^2} = \frac{63uv}{41x \cdot 42uv^2} = \frac{3}{82vx}$

* Statt Kehrwert sagt man auch **reziproker Wert**, entstanden aus dem lateinischen *reciprocus = auf demselben Weg zurückkehrend*, dessen ursprüngliche Bedeutung aber *rückwärts und vorwärts* ist.

**Zur Geschichte der Divisionsregel

In den alten Schriften ging man beim Dividieren durch einen Bruch anders vor als in Satz 48.1. Hatte man nämlich gleichnamige Brüche, z. B. $\frac{7}{4} : \frac{3}{4}$, so konnte man die Nenner wie eine Benennung auffassen und dann die Division wie bei benannten ganzen Zahlen durchführen, also 7 Viertel : 3 Viertel $= 7 : 3 = \frac{7}{3}$, d. h., man dividierte die Zähler durcheinander. Ungleichnamige Brüche machte man erst gleichnamig. So findet man in Aufgabe 36 des *Papyrus Rhind* $1 : (3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}) = \frac{30}{30} : \frac{106}{30} = 30 : 106$. Ebenso rechneten die Griechen, die Chinesen, die Araber und daher lange Zeit auch das Abendland, wo man wegen $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc}$ in vielen Büchern ohne weitere Erklärung das Dividieren als *Über-Kreuz-Multiplizieren* an Hand der Figur $\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \quad \frac{16}{15}$ einführte.
Unsere Regel vom Umkehren des Divisorbruchs lehrte in Indien SCHRĪDHARA (um 900). Im Abendland scheint sie 1544 Michael STIFEL (1487 (?) – 1567) in seiner *Arithmetica integra* erfunden zu haben; denn 1553 nennt er sie stolz »meyn Regel vom diuidiren der brüch«. Abbildung 49.1 gibt sie wieder.


De Diuiſione Minutiarum.

Ego Diuiſionis regulam reduco ad regulam Multiplicationis Minutiarum, hoc modo: Diuiſoris terminos commuto, id eſt, numeratorem pono ſub uirgula, & denominatorem ſupra uirgulam pono. Hoc facto, nihil aliud reſtat, niſi ut operêris iuxtà regulam Multiplicationis ſuperius datam.

Vt uolo diuidere $\frac{1}{2}$ per $\frac{2}{3}$. Sic ſtabit exemplum ad regulam. $\frac{1}{2}$ —— $\frac{3}{2}$. facit $\frac{3}{4}$ quotientem.

Sic ſi uelim diuidere $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{2}$. Sic ſtabit exemplum $\frac{2}{3}$ —— $\frac{2}{1}$. facitq́ hunc quotientem $\frac{4}{3}$. ſeu $1\frac{1}{3}$. Et ſic de alijs.

Et ego noui quâm commode fiat hæc regulæ Diuiſionis reductio, & quâm ſæpe memoriam leuet, præſertim in operationibus exemplorum ſecundum Algebram fiendorum.

Abb. 49.1 Die Divisionsregel für Brüche aus Michael STIFELS *Arithmetica integra* (folium 6r) von 1544 – Übersetzung im Lösungsheft.

Aufgaben

1. a) $\frac{x}{5} : x$ b) $\frac{x}{5} : 5$ c) $3 : \frac{y}{3}$ d) $21y : \frac{3y}{14}$

2. a) $\frac{a}{2} : \frac{a}{3}$ b) $\frac{a}{2} : \frac{b}{4}$ c) $\frac{5x}{12} : \frac{x}{3}$ d) $\frac{9x}{25} : \frac{5y}{3}$

3. a) $\frac{2}{a^2} : (6a)$ b) $8xy : \frac{4}{x}$ c) $\frac{16u^2}{9v} : (12w)$ d) $21ab^2 : \frac{7a}{3b}$

4. a) $\frac{4x}{5y} : \frac{5y}{4x}$ b) $\frac{18m}{35n} : \frac{7m}{9n}$ c) $\frac{108}{25pq} : \frac{135p}{q^2}$ d) $\frac{72ab^2}{27c} : \frac{16a^2b}{45c^2}$

•**5.** a) $\frac{147(uv^2w)^2}{1024ab^3} : \frac{196u^3w}{640(ab)^3}$ b) $\left(\frac{12m^3n}{55xyz^2}\right)^2 : \frac{27m^4x^2}{242ny^2z}$

6. a) $\frac{5(2a-b)}{9} : \frac{4a-2b}{15}$ b) $\frac{5m}{3n-5} : \frac{m^2}{5-3n}$

7. a) $\frac{rs}{24r-32s+20t} : \frac{st}{30r-40s+25t}$ b) $\frac{8x-28y}{5yz-3y} : \frac{21y-6x}{20z-12}$

8. a) $(a^2-9b^2) : \frac{a+3b}{a-3b}$ b) $\frac{6x-6y}{5x+5y} : (3x^2-3y^2)$

9. a) $(2m^2+20m+50) : \frac{m-5}{15+3m}$ b) $\frac{x-3}{3x+15} : (x^2+2x-15)$

10. a) $\frac{25a^2-20ab+4b^2}{4c^2+56c+196} : \frac{5a-2b}{3c+21}$ b) $\frac{8u-20v}{9+3w} : \frac{4u^2-25v^2}{w^2+6w+9}$

11. a) $\frac{9p^2-36q^2}{3-r} : \frac{2p-4q}{r^2-9}$ b) $\frac{18s-2}{81s^2+18s+1} : \frac{2}{1-81s^2}$

•**12.** a) $\frac{x^2-1}{1-y^2} : \left(\frac{x-1}{1-y}\right)^2$ b) $\frac{(x-1)^2+4x}{x^2+4y^2} : \frac{3x^2+6x+3}{4xy-(x+2y)^2}$

13. a) $\left(\frac{1}{a} : \frac{1}{b}\right) : \frac{1}{c}$ b) $\frac{1}{a} : \left(\frac{1}{b} : \frac{1}{c}\right)$ c) $\frac{1}{b} : \left(\frac{1}{c} : \frac{1}{a}\right)$

14. a) $\left(\frac{u}{v} : \frac{v}{w}\right) : \frac{w}{x}$ b) $\frac{u}{v} : \left(\frac{v}{w} : \frac{w}{x}\right)$ c) $\left(\frac{v}{u} : \frac{w}{v}\right) : \frac{x}{w}$

15. a) $\left(\frac{1}{y} : y^2\right) : \frac{1}{y^3}$ b) $\left[\frac{1}{z} : \left(\frac{1}{z^2} : \frac{1}{z^3}\right)\right] : \frac{1}{z^4}$

•**16.** a) $\frac{x^2-9}{6y} : \left(z : \frac{xyz}{x+3}\right)$ b) $\left(\frac{(2m+1)^2}{n-2} : \frac{3n+6}{4m-2}\right) : \frac{4m^2-1}{4-n^2}$

17. a) $\frac{51(x^2-y^2)}{7xy} : [68(x-y)^2]$ b) $\frac{54(a^2-b^2)}{13a} : [81(ab+b^2)]$

c) $\frac{5ab(x-y)}{6xy(x+y)} : \frac{10ax(x-y)}{3by(x+y)}$ d) $\frac{38a(a-b)}{51b(x-y)} : \frac{57b(a^2-b^2)}{68a(x^2-y^2)}$

18. a) $\left(\frac{7ab}{2c}+\frac{4bc^2}{a}\right):(14abc)$ **b)** $\left(\frac{5m^2}{2n}-\frac{7mn}{12}\right):\frac{m^2n^3}{4}$

c) $\left(\frac{-3x^4y^2}{4z^3}-\frac{12(xy)^2}{5z}+\frac{9x^3y}{10z^5}\right):\frac{21x^2y^3}{20z^4}$

•19. a) $\left(\frac{2s-5r}{5r+2s}+\frac{5r+2s}{5r-2s}\right):\frac{5r^2s}{4s^2-25r^2}$

b) $\left(\frac{1-p}{3q-8p}-\frac{p-1}{3q+8p}\right):\left(\frac{1}{8p^2+3pq}\cdot\frac{6p}{q}\right)$

c) $\left(\frac{2x+8}{3a-5b}-\frac{x^2+8x+16}{9a^2-25b^2}+\frac{4+x}{9a+15b}\right):\frac{x^2-16}{9a^2-25b^2}$

20. a) $\frac{21a^2b}{10c^2}:\left(\frac{5ab}{3c}+\frac{ab}{5c}\right)$ **b)** $\frac{7p+4q}{40pq}:\left(\frac{2q}{7p}-\frac{7p}{8q}\right)$

•21. a) $\frac{u^2-2u+1}{4u^2-36}:\left(\frac{2u-2}{u-3}-\frac{3-3u}{u+3}+\frac{1-u^2}{u^2-9}\right)$

b) $\left(\frac{26a^3b^3}{5c^2d}+\frac{8a^4b^2}{5cd^2}\right):\left(\frac{3a^2b^3}{8c^2d^2}-\frac{5a^3b^2}{2cd^3}\right)$

c) $\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{2}{1-x^2}+\frac{2x+1}{1-x^4}\right):\left(\frac{1}{1+x}+\frac{x+7}{1+x^2}\right)$

•22. a) $\left(x^4-\frac{1}{y^4}\right):\left(x+\frac{1}{y}\right)$ **b)** $\left(x^4-\frac{1}{y^4}\right):\left(x-\frac{1}{y}\right)$

•23. a) $\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{bc}{d^2}+2\cdot\frac{a}{d}\right):\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)$ **b)** $\left(\frac{x^2}{y^2}-\frac{1}{12}-\frac{y^2}{2x^2}\right):\left(\frac{3x}{2y}+\frac{y}{x}\right)$

:24. a) $\left(\frac{a+b}{b}-\frac{a-b}{a}+\frac{(a+b)^2}{b}-\frac{(a-b)^2}{b}\right):(a^2-b^2)$

b) $\left(\frac{-2r-5t}{3r}-\frac{2r+5t}{5t}+\frac{4r^2-25t^2}{3}\right):(4r^2-25t^2)$

c) $\left(\frac{6xy+9y^2}{2x}-\frac{4x^2+6xy}{3y}+\frac{8x^3+27y^3}{6xy}-2x-3y\right):(4x^2-9y^2)$