Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

2.5 Doppelbrüche

urn:nbn:de:hbz:466:1-83513

2.5 Doppelbrüche

Ein Bruchterm, in dessen Zähler oder Nenner wieder Bruchterme auftreten, heißt **Doppelbruch.** So sind $\dfrac{\frac{3x}{2y}}{\frac{2x}{3y}}$ und $\dfrac{1+\frac{a}{b}}{1-\frac{a}{b}}$ Beispiele für Doppelbrüche.

Damit klar erkennbar ist, was Zähler und was Nenner ist, muss der Hauptbruchstrich deutlich länger sein als die Nebenbruchstriche.

So ist z. B. $\dfrac{\frac{3x}{2y}}{2x}$ etwas anderes als $\dfrac{3x}{\frac{2y}{2x}}$!

Zur Umformung eines Doppelbruchs könnte man den Hauptbruchstrich durch den Divisions-Doppelpunkt ersetzen und Satz 48.1 anwenden. Besser ist es aber, den Doppelbruch so zu erweitern, dass er zu einem einfachen Bruch wird. Wir führen es zunächst an einem Zahlenbeispiel vor:

$\dfrac{1+\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}-\frac{5}{3}}$ erweitern wir mit dem Hauptnenner 12 der Nebenbrüche:

$$\frac{\left(1+\frac{3}{4}\right)\cdot 12}{\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{3}\right)\cdot 12} = \frac{12+9}{18-20} = -\frac{21}{2}.$$

Bei Doppelbrüchen mit Bruchtermen geht es genauso:

$$\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2} = \frac{\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)xy}{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2\right)xy} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2+2xy} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{x-y}{x+y}.$$

Merke dir die

> **Regel:** Doppelbrüche werden vereinfacht, indem man sie mit dem Hauptnenner der Brüche im Zähler und Nenner erweitert.

Aufgaben

1. a) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}}$ b) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{a}}$ c) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}}$ d) $\dfrac{\frac{a}{b}}{a}$ e) $\dfrac{\frac{a}{b}}{b}$

   f) $\dfrac{a}{\frac{b}{a}}$ g) $\dfrac{a}{\frac{b}{c}}$ h) $\dfrac{\frac{a^2}{b}}{\frac{a}{b^2}}$ i) $\dfrac{\frac{a^2}{b}}{ab}$ j) $\dfrac{a^2}{\frac{b}{ab}}$

2. a) $\dfrac{\frac{3a^2}{14x^2}}{\frac{9a}{7x}}$ b) $\dfrac{\frac{24a^2b^3}{35x^3y^2}}{\frac{36ab}{49x^2y}}$ c) $\dfrac{\frac{25p^5y^3}{21r^4s^6}}{\frac{35p^3y^5}{12r^5s^5}}$ d) $\dfrac{\frac{125a^4x}{111p^2q^3}}{\frac{175ax^4}{148p^3q^2}}$

3. a) $\dfrac{a+\frac{b}{c}}{d}$ b) $\dfrac{a}{b-\frac{c}{d}}$ c) $\dfrac{a+\frac{b}{c}}{a-\frac{b}{c}}$

   d) $\dfrac{a+\frac{b}{c}}{a-\frac{c}{d}}$ e) $\dfrac{2+\frac{a}{3}}{b}$ f) $\dfrac{3a}{5b-\frac{4c}{5}}$

4. a) $\dfrac{\frac{9a^2}{2b}-2b}{\frac{3a}{2b}-1}$ b) $\dfrac{3a-\frac{4x^2}{3a}}{1+\frac{2x}{3a}}$ c) $\dfrac{\frac{a}{5}+4x}{\frac{a}{4}+5x}$

5. a) $\dfrac{\frac{a^3-ab^2}{b}}{\frac{a^3-a^2b}{b^2}}$ b) $\dfrac{1-\frac{a^2}{b^2}}{1+\frac{a}{b}}$ c) $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}}$

6. a) $\dfrac{a-\frac{a(b^2-a)}{b^2}}{b-\frac{b^3-a}{b^2}}$ b) $\dfrac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2}$ c) $\dfrac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}$

7. a) $\dfrac{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{a-1}}{\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{1}{a+1}}$ b) $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}}$ c) $\dfrac{\dfrac{2a-3b}{2a+3b}+\dfrac{2a+3b}{2a-3b}}{\dfrac{2a+3b}{2a-3b}-\dfrac{2a-3b}{2a+3b}}$

8. **Kettenbrüche** in ihrer einfachsten Form verwendet Raffaele Bombelli (1526 Bologna–1572 ebd.) in seiner *L'Algebra* (1557/60 niedergeschrieben, 1572 erschienen). Pietro Antonio Cataldi (1552 Bologna–1626 ebd.) bildet im *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri* (1597 verfasst, 1613 erschienen) sogar unendliche Kettenbrüche.
Verwandle die folgenden Kettenbruchterme in die übliche Bruchform, d. h. in Bruchterme, bei denen weder im Zähler noch im Nenner Bruchstriche vorkommen.

a) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$ b) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}}$ c) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}}}$

d) $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+1}}$ e) $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+1}}}$ f) $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+1}}}}$