Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

1.2 Äquivalenz von Bruchtermen

1.2 Äquivalenz von Bruchtermen

Zwei Brüche können denselben Wert haben, obwohl sie verschiedene Zähler und Nenner haben. So gilt z. B. $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. Bei komplizierteren Zahlen ist die Gleichheit aber nicht mehr so einfach zu sehen. Sind etwa $\frac{34}{51}$ und $\frac{38}{57}$ gleich?

Die Gleichheit zweier Brüche erkennt man leicht, wenn sie gleichen Nenner haben; dann müssen nämlich auch die Zähler gleich sein, damit die Brüche gleich sind. Erweitern wir also $\frac{34}{51}$ und $\frac{38}{57}$ jeweils mit dem Nenner des anderen Bruchs, so erhalten wir $\frac{34 \cdot 57}{51 \cdot 57}$ bzw. $\frac{38 \cdot 51}{57 \cdot 51}$. Die Zähler ergeben jedesmal die Zahl 1938. Also gilt $\frac{34}{51} = \frac{38}{57}$, weil $34 \cdot 57 = 38 \cdot 51$.
Weiß man umgekehrt von zwei Brüchen, dass sie gleich sind, wie z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{6}{8}$, dann ergibt sich mit derselben Überlegung, dass dann auch die Produkte $3 \cdot 8$ und $6 \cdot 4$ gleich sein müssen.
Damit haben wir die Untersuchung der Gleichheit zweier Brüche durch die gleichwertige Untersuchung der Gleichheit zweier Produkte ersetzt.
Genauso können wir die Untersuchung der Äquivalenz von zwei Bruchtermen durch die Untersuchung der Äquivalenz von zwei Produkten ersetzen. Dabei müssen wir allerdings bedenken, dass die Äquivalenz nur auf der gemeinsamen Definitionsmenge der betrachteten Bruchterme sinnvoll ist!
Auf Grund der obigen Überlegungen gilt also

> **Satz 14.1:** Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ Bruchterme, dann gilt in der gemeinsamen
>
> Definitionsmenge: $\quad \boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc}$

Beispiel: $T_1(x) = \dfrac{x}{x+1}, \quad D_1 = \mathbb{Q} \setminus \{-1\},$

$T_2(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}, \quad D_2 = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 1\}.$

Die gemeinsame Definitionsmenge ist $D = D_1 \cap D_2 = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 1\}$.

Annahme: $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}$

Prüfung der Annahme:
$$\begin{aligned} x(x^2 - 1) &= (x^2 - x)(x + 1) \\ x^3 - x &= x^3 + x^2 - x^2 - x \\ x^3 - x &= x^3 - x \end{aligned}$$

Links und rechts vom Gleichheitszeichen steht derselbe Term, also sind die Bruchterme $T_1(x)$ und $T_2(x)$ in D äquivalent, d. h., bei jeder Belegung aus D liefern T_1 und T_2 dieselben Werte.

Aufgaben

1. Sind folgende Brüche einander gleich?

   a) $\frac{37}{51}$ und $\frac{481}{663}$ b) $\frac{912}{1377}$ und $\frac{48}{73}$ c) $\frac{107}{43}$ und $2\frac{751}{1333}$

   d) $(\frac{17}{16})^2$ und $1 + \frac{297}{48^2}$

2. Für welchen Wert von x sind folgende Brüche einander gleich und wie lauten sie dann?

   a) $\frac{18}{x}$ und $1\frac{2}{7}$ b) $\frac{5x}{16}$ und $\frac{3}{4}$ c) $\frac{2x+7}{9}$ und $\frac{5}{3}$ d) $\frac{3x}{7}$ und $\frac{x}{9}$

3. Für welchen Wert von x sind folgende Brüche einander gleich und wie lauten sie dann?

   a) $\frac{5}{3} = \frac{x}{5}$ b) $\frac{45}{x} = 18$ c) $\frac{3x-4}{25} = \frac{1}{5}$ d) $\frac{9-7x}{3} = \frac{-1}{2}$

4. Wann sind Brüche mit gleichem Nenner einander gleich?

5. Wann sind Brüche mit gleichem Zähler einander gleich?

6. Ist es möglich, dass zwei Brüche mit gleichem Zähler und verschiedenen Nennern einander gleich sind?

7. Sind die folgenden Bruchterme äquivalent?

   a) $\frac{x}{x+1}$ und $\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}$ b) $\frac{x+1}{x-1}$ und $\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$

   c) $\frac{\frac{1}{2}x^2-4{,}5}{x+3}$ und $\frac{x-3}{2}$ d) $\frac{x-4}{2x}$ und $\frac{x^2-16}{2x^2-8}$

1.3 Erweitern und Kürzen

Die dir vom Rechnen mit Brüchen bekannten Operationen *Erweitern* und *Kürzen** lassen sich auch auf Bruchterme übertragen.

* Das Fachwort **erweitern** wurde vermutlich von dem preußischen Gymnasiallehrer Johann Friedrich Kroll in seinem 1839 erschienenen *Grundriß der Mathematik für Gymnasien und andere höhere Lehranstalten* geprägt.
Eine interessantere Geschichte hat das Fachwort **kürzen**, das erst zu Anfang dieses Jahrhunderts aufgekommen zu sein scheint. Der aus Norddeutschland stammende Theologe und Mathematiker Jordanus Nemorarius (um 1180–1237), der 1222 zum zweiten Ordensgeneral der Dominikaner gewählt wurde, auf dessen Anregung die Universität in Toulouse gegründet wurde und dessen mathematische Schriften lange Zeit in Gebrauch waren, sagte dafür *ad minorem denominationem reducere = auf eine kleinere Benennung zurückführen.* Sein Zeitgenosse Gernardus sprach von *subtiliores minutias in grossiores reducere = feiner gebaute Brüche auf gröbere zurückführen.* Der Rechenmeister Christoff Rudolff (um 1500 – vor 1543) und andere überschrieben die betreffenden Kapitel mit »Prüch kleiner machen«; für kürzen sagte er *aufheben*, worunter man beim mittelalterlichen Linienrechnen verstand, so viele Rechenpfennige wegzunehmen, dass eine Zahl durch möglichst wenige von ihnen ausgedrückt wurde. (Befanden sich 5 auf einer Linie, so nahm man 4 weg und setzte einen in den Zwischenraum zur nächsthöheren Linie.) Aus *aufheben* wurde zu Beginn des 19. Jh.s *heben*, das sich bis in unser Jh. noch in den Rechenbüchern fand.