



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

Aufgaben

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83513](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83513)

Aufgaben**1. Erweitere:**

a) $\frac{3}{4}$ mit 17

b) $\frac{2a}{5b}$ mit -21

c) $17:13$ mit x

d) $5p:(2q)$ mit pq

e) $\frac{9a+1}{a-3}$ mit $2a^2$

f) $\frac{5cd^2}{3}$ mit $2c+d$

g) $\frac{3u+v}{3u-v}$ mit $-(3u-v)$

h) $[3n(2+m^2)]:(7m^2-n^2)$ mit $4-2m^2$

i) $\frac{7x-24}{3x+y}$ mit $5x+4y$

k) $(7a^2-5ab-b^2):(3-2ab)$ mit -1

2. a) Schreibe 1 als Bruch mit dem Nenner 29.

b) Schreibe 5 als Bruch mit dem Nenner -7 .

c) Schreibe $-a$ als Bruch mit dem Nenner b .

d) Schreibe $3x^2y$ als Bruch mit dem Nenner y^2 .

e) Schreibe $5u^2-20uv$ als Bruch mit dem Nenner $u+4v$.

f) Schreibe 0 als Bruch mit dem Nenner $(3+z)^2$.

3. a) Schreibe 64 als Bruch mit dem Zähler 1024.

b) Schreibe $-8a^2b$ als Bruch mit dem Zähler $16(ab)^2$.

c) Schreibe $4p-3q$ als Bruch mit dem Zähler $3q-4p$.

d) Schreibe $3-7n$ als Bruch mit dem Zähler $9-49n^2$.

4. Bringe die folgenden Brüche auf den angegebenen Nenner.

a) $\frac{5}{2a+b}; \frac{7a+b}{2a-b}; \frac{b-a}{b-2a}; \frac{2a+b}{1}$; Nenner $4a^2-b^2$

b) $\frac{q+2}{p}; \frac{3p}{q+1}; \frac{7p-3q}{q-1}; \frac{q-1}{p(q+1)}$; Nenner pq^2-p

c) $\frac{5m^2n}{3}; \frac{6m+4n}{3m-2n}; \frac{1}{9m-6n}; \frac{a-8b}{(3m-2n)^2}$; Nenner $27m^2-36mn+12n^2$

5. Bringe die folgenden Brüche auf den angegebenen Nenner.

a) $\frac{a+b}{a-b}$ Nenner a^2-b^2

b) $\frac{x-y}{x+y}$ Nenner x^2-y^2

c) $\frac{2a-3b}{5a-4b}$ Nenner $25a^2-16b^2$

d) $\frac{4p-q}{2p+3q}$ Nenner $4p^2-9q^2$

e) $\frac{r+s}{3r-2s}$ Nenner $9r^2-4s^2$

f) $\frac{2a+3}{a-1}$ Nenner a^2-1

g) $\frac{2x-3}{x-3}$ Nenner $9-x^2$

h) $\frac{4x+5}{5-2x}$ Nenner $4x^2-25$

6. Bringe die folgenden Brüche auf den angegebenen Nenner N .

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{a+b}{a-b} & N = a^2 - 2ab + b^2 \\ \text{b)} \frac{x-y}{x+y} & N = x^2 + 2xy + y^2 \\ \text{c)} \frac{2a-3b}{a+2b} & N = a^2 + 4ab + 4b^2 \\ \text{d)} \frac{p+q}{p-3q} & N = p^2 - 6pq + 9q^2 \\ \text{e)} \frac{5r-7s}{2a-3} & N = 4a^2 - 12a + 9 \\ \text{f)} \frac{2x-5}{3x-1} & N = 9x^2 - 6x + 1 \end{array}$$

7. Bringe die folgenden Brüche auf den angegebenen Nenner N .

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{4x-9}{x-7} & N = x^2 - 16x + 63 \\ \text{b)} \frac{2a+7}{a-3} & N = a^2 + 5a - 24 \\ \frac{3u-11}{u+5} & N = u^2 - 4u - 45 \\ \text{d)} \frac{6z-1}{z-7} & N = z^2 - 5z - 14 \\ \text{e)} \frac{2a-9}{7a+3} & N = 42a^2 - 10a - 12 \\ \text{f)} \frac{6x-5}{7x-5} & N = 21x^2 + 13x - 20 \\ \text{g)} \frac{11x-9}{2x-5} & N = 16x^2 - 46x + 15 \\ \text{h)} \frac{3u+8}{5u-6} & N = 40u^2 - 53u + 6 \\ \text{i)} \frac{7r^2-3}{8r^2-3} & N = 56r^4 + 19r^2 - 15 \\ \text{j)} \frac{3a^2+7}{6a^2+5} & N = 48a^4 - 2a^2 - 35 \\ \text{k)} \frac{2a-7b}{7a-9b} & N = 56a^2 - 51ab - 27b^2 \\ \text{l)} \frac{7x-5y}{4x-3y} & N = 36x^2 - 7xy - 15y^2 \end{array}$$

8. Bestimme die fehlenden Zähler und Nenner.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{11x-7}{5x+3} = \frac{\dots}{3+5x} & \text{b)} \frac{11x-7}{5x+3} = \frac{7-11x}{\dots} \\ \text{c)} \frac{(2x)^2}{3} = \frac{\dots}{12-3x} & \text{d)} \frac{z-2}{12z+1} = \frac{5z^2-20}{\dots} \\ \text{e)} \frac{x+1}{x+2} = \frac{\dots}{x^2+3x+2} & \text{f)} \frac{x-4}{5-x} = \frac{x^2+x-20}{\dots} \\ \text{g)} \frac{7s-t}{4s+3} = \frac{\dots}{8s^2+6s} = \frac{\dots}{16s^2+24s+9} = \frac{2t^2-98s^2}{\dots} \end{array}$$

9. Löse folgende Gleichungen für die Unbekannte x .

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{x}{5} = 0 & \text{b)} \frac{6x^2}{x+3} = \frac{5u^2 \cdot 0}{x^2-9} & \text{c)} 7x : (3a) = 0 \\ \text{d)} 2x : (a^2+1) = 0 : 7 & \text{e)} \frac{2x-3}{9} = 0 & \text{f)} \frac{(9x-6)^2 a^3}{4b} = \frac{0}{36b} \end{array}$$

•10. Erweitere den Bruch

- a) $\frac{7r-9s}{5p-3q}$ auf den Nenner $10pr-15ps-6qr+9qs$
- b) $\frac{2x+3y}{7m-4n}$ auf den Nenner $35mx-28my-20nx+16ny$
- c) $\frac{a^2+ab+b^2}{2a-3b}$ auf den Nenner $8a^3-12a^2b+18ab^2-27b^3$
- d) $\frac{5p-6q}{4p-5q}$ auf den Nenner $24ap-36bp-30aq+45bq$
- e) $\frac{7x^2-9y^2}{5u-3z}$ auf den Nenner $35x^2u-21x^2z-40y^2u+24y^2z$
- f) $\frac{2x-3y}{7x^2y-4xy^2}$ auf den Nenner $14x^5y^3-63x^3y^2-8x^4y^4+36x^2y^3$
- g) $\frac{4x^2-3y}{23a^2-35b}$ auf den Nenner $92a^2x^2-69a^2y-140bx^2+105by$.

•11. Erweitere den Bruch

- a) $\frac{a-b}{a^2+ab+b^2}$ auf den Nenner a^3-b^3
- b) $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}$ auf den Nenner a^3+b^3
- c) $\frac{a}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$ auf den Nenner a^4-b^4
- d) $\frac{a}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}$ auf den Nenner a^4-b^4 .

Kürze die in den Aufgaben 12 bis 16 angegebenen Quotienten so weit wie möglich!

12. a) $\frac{93}{124}$ b) $\frac{-16a}{12b}$ c) $\frac{45(x+1)}{5}$ d) $\frac{18p}{-9}$
13. a) $\frac{6uvw}{3uw}$ b) $\frac{14xyz}{21xy}$ c) $\frac{49pq}{28pq}$ d) $\frac{3(a+2b)}{9(a+2b)}$
14. a) $x^4 : x$ b) $y^2 : y^5$ c) $3z^9 : (12z^8)$ d) $[16(u-v)^3] : [8(u-v)^2]$
15. a) $\frac{24a^2bc^3}{9a^3b^2c}$ b) $\frac{69p^5q^2r^4}{46(pr)^3}$ c) $\frac{15(a^2b)^2c^3}{(5a)^3(bc)^2}$ d) $\frac{44(uv)^2u^3}{12(u^2v)^3}$
16. a) $(4u-v)^2 : [2(4u-v)]$ b) $(4u-v) : [2(4u-v)]^2$
 c) $[xy(5x-2y)^2] : [x(2y-5x)]$ d) $(7p-4q)^3 : (35p-20q)^2$

17. Vereinfache durch Kürzen:

a) $\frac{a^7}{a^3}$ b) $a^{11} : a$ c) $\frac{a^4}{a^4}$ d) $\frac{a^2}{a^9}$ e) $a^6 : a^7$

18. Kürze den Bruch

a) $\frac{abc}{bcd}$ b) $\frac{axy}{bxy}$ c) $\frac{pq^2r}{pq}$ d) $\frac{a}{ax}$ e) $\frac{abc}{4abcd}$

f) $\frac{a^2x^3}{7a^2x^3y^2}$ g) $\frac{12x^4}{8x^3}$ h) $\frac{7a^3b^2}{56a^2b^3}$ i) $\frac{24a^5b^7}{36a^8b^4}$

k) $\frac{75x^4y^3z^5}{105x^4y^3z^5}$ l) $\frac{165r^2s^3t^7}{187r^5s^6t^4}$ m) $\frac{147a^4p^3x^6}{189a^4bcx^8}$

• 19. Kürze den Bruch

a) $\frac{ax + bx}{cx}$ b) $\frac{12ax - 18ay}{24ap + 30aq}$ c) $\frac{25rx - 35ry}{35sx - 49sy}$
d) $\frac{65a^2x^2 + 91ax^3}{85a^2x + 119ax^2}$ e) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$ f) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$
g) $\frac{15xy - 25y^2}{9x^2 - 30xy + 25y^2}$ h) $\frac{21a^2 + 9a}{49a^2 + 42a + 9}$ i) $\frac{50a^3 - 72ab^2}{25a^2 - 60ab + 36b^2}$

Zerlege in den Aufgaben 20 bis 30 Zähler und Nenner in Faktoren und kürze.

20. a) $\frac{3m + 6n}{8m + 16n}$ b) $\frac{6x - 24y}{6x - 18y}$ c) $\frac{4a + 6b}{3b + 2a}$ d) $\frac{4a - 6b}{3b - 2a}$

21. a) $\frac{1,5n - 4,5m}{6n - 18m}$ b) $\frac{6u - 2,4v}{5u - 2v}$ c) $\frac{4a - 12ab}{8a^2 + 20ab}$ d) $\frac{18c^3d + 6c^2d^2}{14cd^3 + 42c^2d^2}$

22. a) $\frac{2x + 1}{4x^2 + 4x + 1}$ b) $\frac{9y^2 - 12yz + 4z^2}{9y - 6z}$

c) $\frac{4a + 1}{32a^2 - 2}$ d) $\frac{45p^2 - 20q^2}{21p - 14q}$

23. a) $\frac{64 - 25a^2}{64 - 80a + 25a^2}$ b) $\frac{0,16b^2 + 2b + 6,25}{160b^2 + 2000b + 6250}$

c) $\frac{1600x^2 - 1000y^2}{25y^2 - 40x^2}$ d) $\frac{18d^2 - 48d + 32}{2,25d^2 - 4}$

24. a) $\frac{ax - bx + ay - by}{5a - 5b}$ b) $\frac{3a + 2ab - 9b - 6b^2}{3 + 2b}$

c) $\frac{7ab - 35a^2 - 10a + 2b}{-10a + 2b}$ d) $\frac{1 - x + x^2 - x^3}{1 + x^2}$

- 25. a) $\frac{16m^2 - 9n^2}{8m^2 - 6mn + 4m - 3n}$ b) $\frac{5p^2 + p + q + 5pq}{25p^2 + 10p + 1}$
 c) $\frac{8a + 9b - 12ab - 6}{8a^2b - 12a^2b^2}$ d) $\frac{10u^2 - 8uv + 5uw - 4vw}{5u^2 - 4uv + 10uw - 8vw}$
26. a) $\frac{(x-y)x + y(x-y)}{x^2 - y^2}$ b) $\frac{(x-y)^2x + (x-y)^2y}{x^3 - xy^2}$
 • c) $\frac{x^4 - 1}{x(x^2 + 1) + x^2 + 1}$ d) $\frac{x^4 - x^2}{x^3 + 2x^2 + x}$
- 27. a) $\frac{u^2 + v^2 - w^2 + 2uv}{u + v + w}$ b) $\frac{4p^2 - 4pq + q^2 - 25r^2}{4p - 2q + 10r}$
 c) $\frac{m^2 + 2mn + n^2 - 1}{m^2 - n^2 - 2m + 1}$ d) $\frac{a^4 - 8a^2 + 16}{a^3 - 4a^2 - 4(a - 4)}$
 e) $\frac{75my^2 + 50ny^2 - 30myz - 20nyz + 3mz^2 + 2nz^2}{-45m^2y + 9m^2z - 60mny + 12mnz - 20n^2 + 4n^2z}$

28. Vereinfache so weit wie möglich.

- a) $\frac{25a^2 - 100b^2}{5a + 10b}$ b) $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$
 • c) $\frac{z^2 - 4z + 3}{z^2 - 2z - 1}$ • d) $\frac{z^2 - 2z - 3}{z^2 + 2z + 1}$
- 29. a) $\frac{a^2 + ab - 12b^2}{a^2 - ab - 20b^2}$ b) $\frac{p^2 + pq - 20q^2}{p^2 + 2pq - 15q^2}$
 c) $\frac{r^2 + 4rs - 21s^2}{r^2 + 12rs + 35s^2}$ d) $\frac{x^2 - 8xy + 15y^2}{x^2 + xy - 30y^2}$
 e) $\frac{a^2 + 5ab - 14b^2}{a^2 + 12ab - 28b^2}$ f) $\frac{p^2 - 4pq - 45q^2}{p^2 - pq - 30q^2}$
 g) $\frac{15r^2 + rs - 6s^2}{12r^2 + 5rs - 2s^2}$ h) $\frac{4x^2 + 20xy + 25y^2}{6x^2 + 23xy + 20y^2}$
 i) $\frac{15p^2 - 19pq - 56q^2}{15p^2 - 58pq + 48q^2}$ j) $\frac{18u^2 - 3uv - 10v^2}{53uv - 40v^2 - 6u^2}$
 k) $\frac{64x^3y - 136x^2y^2 + 42xy^3}{48x^3y - 140x^2y^2 + 98xy^3}$ l) $\frac{48a^3 - 2a^2b - 35ab^2}{36a^2b + 60ab^2 + 25b^3}$
 m) $\frac{72x^2z + 7xyz - 2y^2z}{40x^3y - 29x^2y^2 + 3xy^3}$ n) $\frac{6x^3z - 24xy^2z}{2x^3y - 8x^2y^2 + 8xy^3}$

30. a) $\frac{14a^2x^2 - 63a^2y^2 - 8b^2x^2 + 36b^2y^2}{49a^4 - 56a^2b^2 + 16b^4}$

b) $\frac{8a^2u^2 - 3b^3 - 6abu + 4ab^2u}{12a^3u^2 - 9a^2bu + 20abu - 15b^2}$

c) $\frac{15a^2 - 21bc - 35ab + 9ac}{9ab - 15ac - 21b^2 + 35bc}$ d) $\frac{48ax - 42bx + 40ay - 35by}{16au - 14bu - 24av + 21bv}$

1.4 Hauptnenner

Bruchterme mit gleichem Nenner heißen **gleichnamig**; haben sie verschiedene Nenner, dann heißen sie **ungleichnamig***. So sind zum Beispiel die Bruchterme

$\frac{b}{a^2 + ac}$ und $\frac{d}{a(a + c)}$ gleichnamig, die Bruchterme $\frac{b}{a^2 + ac}$ und $\frac{d}{a(a - c)}$ ungleichnamig.

Ungleichnamige Bruchterme lassen sich ebenso wie Brüche, deren Zähler und Nenner Zahlen sind, durch Erweitern gleichnamig machen. Man muss dazu als gemeinsamen Nenner einen Term finden, in dem jeder einzelne Nenner als Faktor enthalten ist. Zum Beispiel ist das Produkt aller vorkommenden Nenner ein gemeinsamer Nenner. In vielen Fällen ist es jedoch möglich, einen einfacheren gemeinsamen Nenner anzugeben. Man zerlegt dazu jeden Nenner so weit wie möglich in Faktoren und ermittelt wie bei Zahlen das kleinste gemeinsame Vielfache (kurz: kgV) der Nenner. Den so bestimmten gemeinsamen Nenner bezeichnet man als *Hauptnenner* (kurz: HN).

Definition 23.1: Unter dem **Hauptnenner** von Bruchtermen versteht man das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner dieser Bruchterme.

Beispiel: $\frac{u}{4a^2 - 9b^2}; \frac{v}{10a + 15b}; \frac{w}{2ac - 3bc}$

Nenner	Faktorisierung	Erweiterungsfaktoren (EF)
$4a^2 - 9b^2$	$= (2a + 3b)(2a - 3b)$	$5c$
$10a + 15b$	$= 5(2a + 3b)$	$c(2a - 3b)$
$2ac - 3bc$	$= c(2a - 3b)$	$5(2a + 3b)$
HN = $5c(2a + 3b)(2a - 3b)$		

* Bernardo BARLAAM (um 1290–nach 1348), Mönch, später Bischof von Gerace in Kalabrien, verwendet in seiner griechisch verfassten *logistica* die Ausdrücke *συνώνυμος* (*synónymos*) und *ἑτερόνυμος* (*heterónymos*), die wörtlich übersetzt **gleich-** bzw. **ungleichnamig** ergeben. Im Deutschen des 15. und 16. Jh.s gibt es dafür allerlei Ausdrücke; *gleichnamig machen* verwendet der zu seiner Zeit bekannte Rechenmeister Simon JACOB (1510(?) Coburg – 1564 Frankfurt) in seinem *Ein New vnd Wolgegründt Rechenbuch* (1565).