Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

1.4 Hauptnenner

30. a) $\dfrac{14a^2x^2 - 63a^2y^2 - 8b^2x^2 + 36b^2y^2}{49a^4 - 56a^2b^2 + 16b^4}$

b) $\dfrac{8a^2u^2 - 3b^3 - 6abu + 4ab^2u}{12a^3u^2 - 9a^2bu + 20abu - 15b^2}$

c) $\dfrac{15a^2 - 21bc - 35ab + 9ac}{9ab - 15ac - 21b^2 + 35bc}$ d) $\dfrac{48ax - 42bx + 40ay - 35by}{16au - 14bu - 24av + 21bv}$

1.4 Hauptnenner

Bruchterme mit gleichem Nenner heißen **gleichnamig**; haben sie verschiedene Nenner, dann heißen sie **ungleichnamig***. So sind zum Beispiel die Bruchterme $\dfrac{b}{a^2 + ac}$ und $\dfrac{d}{a(a+c)}$ gleichnamig, die Bruchterme $\dfrac{b}{a^2 + ac}$ und $\dfrac{d}{a(a-c)}$ ungleichnamig.

Ungleichnamige Bruchterme lassen sich ebenso wie Brüche, deren Zähler und Nenner Zahlen sind, durch Erweitern gleichnamig machen. Man muss dazu als gemeinsamen Nenner einen Term finden, in dem jeder einzelne Nenner als Faktor enthalten ist. Zum Beispiel ist das Produkt aller vorkommenden Nenner ein gemeinsamer Nenner. In vielen Fällen ist es jedoch möglich, einen einfacheren gemeinsamen Nenner anzugeben. Man zerlegt dazu jeden Nenner so weit wie möglich in Faktoren und ermittelt wie bei Zahlen das kleinste gemeinsame Vielfache (kurz: kgV) der Nenner. Den so bestimmten gemeinsamen Nenner bezeichnet man als *Hauptnenner* (kurz: HN).

Definition 23.1: Unter dem **Hauptnenner** von Bruchtermen versteht man das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner dieser Bruchterme.

Beispiel: $\dfrac{u}{4a^2 - 9b^2}$; $\dfrac{v}{10a + 15b}$; $\dfrac{w}{2ac - 3bc}$

Nenner Faktorisierung	Erweiterungsfaktoren (EF)
$4a^2 - 9b^2 = (2a + 3b)(2a - 3b)$	$5c$
$10a + 15b = 5(2a + 3b)$	$c(2a - 3b)$
$2ac - 3bc = c(2a - 3b)$	$5(2a + 3b)$

$\mathrm{HN} = 5c(2a + 3b)(2a - 3b)$

* Bernardo Barlaam (um 1290 – nach 1348), Mönch, später Bischof von Gerace in Kalabrien, verwendet in seiner griechisch verfassten *logistica* die Ausdrücke *συνώνυμος* (synónymos) und *ἑτερώνυμος* (heterónymos), die wörtlich übersetzt **gleich-** bzw. **ungleichnamig** ergeben. Im Deutschen des 15. und 16. Jh.s gibt es dafür allerlei Ausdrücke; *gleichnamig machen* verwendet der zu seiner Zeit bekannte Rechenmeister Simon Jacob (1510(?) Coburg – 1564 Frankfurt) in seinem *Ein New vnd Wolgegründt Rechenbuch* (1565).

Mithilfe der Erweiterungsfaktoren können wir die gegebenen Brüche gleichnamig machen:

$$\frac{u}{4a^2-9b^2}=\frac{5cu}{5c(2a+3b)(2a-3b)}$$

$$\frac{v}{10a+15b}=\frac{cv(2a-3b)}{5c(2a+3b)(2a-3b)}$$

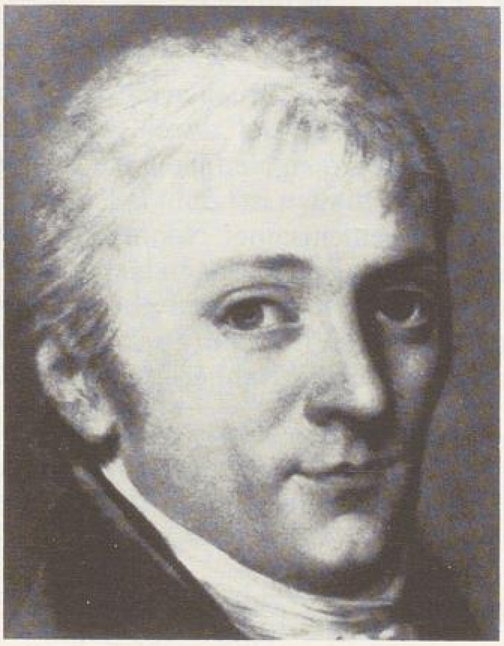
$$\frac{w}{2ac-3bc}=\frac{5w(2a+3b)}{5c(2a+3b)(2a-3b)}.$$

**Zur Geschichte des Hauptnenners

Im 九章算術 (*Chiu Chang Suan Shu*)* – »Neun Bücher arithmetischer Technik« – der Han-Zeit (202 v. Chr.–9 n. Chr.) wird der Hauptnenner als Produkt aller Nenner eingeführt, bei den Aufgaben von Buch IV wird meist jedoch das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner als Hauptnenner genommen, ohne dass angegeben wird, wie man es findet. Die Araber wie z. B. AL-KARADSCHI (†1019/29) und auch LEONARDO VON PISA (um 1170 – nach 1240) bestimmten den Hauptnenner mehrerer Nenner schrittweise, indem sie zuerst das Produkt von zwei Nennern durch deren größten gemeinsamen Teiler teilten; genauso verfuhren sie mit der so erhaltenen Zahl und dem dritten Nenner usw.

Auch BHĀSKARA II (1115 – nach 1178), ein indischer Astronom und Mathematiker, der das gesamte mathematische Wissen seiner Zeit zusammenfasste, sagte im *Lilavati* – »Die Schöne« – (das Werk ist tatsächlich einer schönen Frau gewidmet, die öfters angesprochen wird), dass der intelligente Rechner nicht immer das Produkt aller Nenner als Hauptnenner nehme.

Das Zerlegungsverfahren zum Aufsuchen des Hauptnenners, das du schon in der 6. Klasse gelernt hast, hat 1801 der große deutsche Mathematiker Carl Friedrich GAUSS (1777–1855) in seinen *Disquisitiones arithmeticae* – »Untersuchungen über höhere Arithmetik« – beschrieben.



1803

Carl Friedrich Gauß

Abb. 24.1 Carl Friedrich GAUSS [Gauß] (30. 4. 1777 Braunschweig – 23. 2. 1855 Göttingen) – Pastell von Johann Christian August SCHWARTZ (1756–1814). *Mathematicorum princeps* – »Fürst der Mathematiker« – stand auf der Gedenkmedaille, die der König von Hannover 1855 prägen ließ.

* gesprochen tschiu tschang suan schu

Der Ausdruck **kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches** erscheint 1825 in *Die reine Elementar-Mathematik* des Gymnasiallehrers und späteren Professors Martin OHM (1792 Erlangen – 1872 Berlin). Wer den Ausdruck **Hauptnenner** einführte, konnten wir nicht herausfinden. Im *Algorismus Ratisbonensis* hieß er noch der *gemain nenner*.

Aufgaben

1. Sind folgende Brüche gleichnamig?

a) $\frac{3}{7}$ und $\frac{4}{4^2-3^2}$ **b)** $\frac{1}{5\cdot 7-6^2}$ und $\frac{1}{3^4-5\cdot 2^4}$

c) $\frac{3^2\cdot 2^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$ und $\frac{10}{11^2-1}$ **d)** $\frac{7}{(a+2)(a-1)}$ und $\frac{3a}{a^2+a-1}$

e) $\frac{5x^2+1}{3x^2-12}$ und $\frac{7x-2}{(x+2)(x-2)\cdot 3}$ **f)** $\frac{2a-3b}{a^3-b^3}$ und $\frac{5}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

2. Für welche Werte von x sind folgende Brüche gleichnamig?

a) $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{x-2}$ **b)** $\frac{a}{2x+3}$ und $\frac{b}{18}$ **c)** $\frac{y}{4x}$ und $\frac{z}{x^2}$

d) $\frac{m}{(2x+3)(2x-3)}$ und $\frac{n}{x(4x+3)-3(x+3)}$

3. Mache gleichnamig

a) $\frac{7}{24}$; $\frac{3}{64}$ **b)** $\frac{2}{7\cdot 11-5\cdot 13}$; $\frac{34}{3^2\cdot 14-6\cdot 23}$

c) $\frac{a}{-2}$; $\frac{3}{2a}$ **d)** $\frac{5}{x^2}$; $\frac{1}{3x}$

e) $\frac{2u}{3}$; $\frac{5u}{3u-3}$ **f)** $\frac{1}{3p}$; $\frac{7}{4q}$

g) $\frac{a}{7c^2d^3}$; $\frac{b}{2c^3d^2}$ **h)** $\frac{y}{10(x+1)}$; $\frac{y^2}{5(x^2-1)}$.

4. Bringe auf gleichen Nenner

a) $\frac{c-d}{a+b}$; $\frac{a+b}{c+d}$ **b)** $\frac{5-x}{2x^2-8}$; $\frac{x+3}{3x^2-12}$

c) $\frac{1}{6x-3}$; $\frac{x^2+5}{8x^3-4x^2}$ **d)** $\frac{b}{a^2-9}$; $\frac{c}{3a-9}$

e) $\frac{1+2z}{4-z^2}$; $\frac{3z}{z^2-4z+4}$ **f)** $\frac{1}{n^4-9m^2n^2}$; $\frac{1}{n^2+3mn}$

g) $\frac{p+1}{p^2q+p^2}$; $\frac{p-1}{pq^2-pq}$; $\frac{2}{q^3-q}$

h) $\frac{a}{(xy)^2-y^2}$; $\frac{b}{2x^2y+2y}$; $\frac{c}{x^4-1}$

i) $\frac{ab}{2a+3b}$; $\frac{2a}{12a^2+36ab+27b^2}$; $\frac{(2a-3b)^2}{2a}$; $\frac{1}{3b}$.

5. Bestimme den Hauptnenner und die Erweiterungsfaktoren.

a) $\frac{1}{4a}$; $\frac{1}{2a^3+3a^2}$; $\frac{1}{8a^2-12a}$

b) $\frac{a}{5x^2-5x}$; $\frac{b}{x^2y^2+xy^2}$; $\frac{c}{x-x^3}$

c) $\frac{x}{144m^2-144mn+36n^2}$; $\frac{y}{3n^2+12mn+12m^2}$; $\frac{z}{2m^2-0{,}5n^2}$

d) $\frac{1}{x+5}$; $\frac{2}{4x-28}$; $\frac{3}{x^2-2x-35}$

e) $\frac{a}{ax^2+3bx^2+a+3b}$; $\frac{b}{-4a+4ax^2+12bx^2-12b}$

f) $\frac{p}{m^3-405n^3+5m^2n-81mn^2}$; $\frac{q}{-m^3-225n^3+9m^2n+25mn^2}$

6. Kürze zuerst und mache dann gleichnamig. Berechne zum Vergleich auch den Hauptnenner der ungekürzten Brüche.

a) $\frac{15ab}{6a-3b}$; $\frac{2a^2+ab}{4a^2+4ab+b^2}$; $\frac{6ab-3b^2}{4a^2-b^2}$

b) $\frac{9x}{3x+12}$; $\frac{2x^3}{8x^2+x^3}$; $\frac{-4x-x^2}{x^2+12x+32}$

c) $\frac{3x+6}{2x^2+8x+8}$; $\frac{10-5x}{4x^2-16x+16}$; $\frac{x^2-2x}{196-49x^2}$