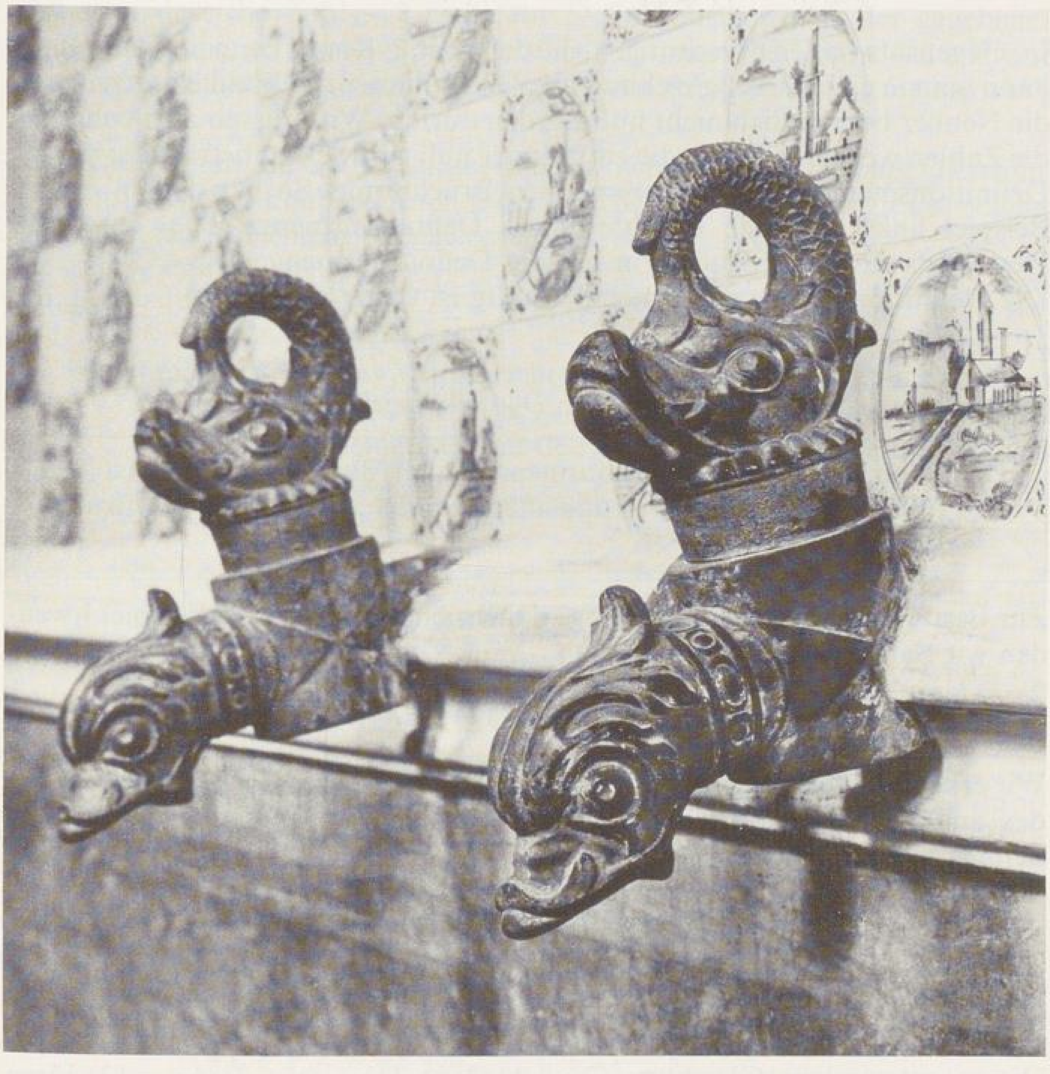
Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

3 Bruchgleichungen

3 Bruchgleichungen



Wasserhähne in Form vergoldeter Delphine im Badebecken der Badenburg im Schlosspark zu Nymphenburg (München), die 1718–1722 von dem kurfürstlichen Hofbaumeister Joseph EFFNER (1687–1745) für Kurfürst MAX EMANUEL erbaut wurde.

3 Bruchgleichungen

3.1 Kreuzweises Multiplizieren

Eine Gleichung, in der Bruchterme vorkommen, bei denen wenigstens ein Nenner eine Unbekannte enthält, nennen wir kurz **Bruchgleichung**. Die einfachste Form einer Bruchgleichung liegt vor, wenn auf der linken und auf der rechten Seite je ein Bruchterm steht. Hierzu

Beispiel 1: $\frac{2x-1}{x+3} = \frac{6x-13}{3x+11}$.

Im Gegensatz zu den Gleichungen, die du in der 7. Klasse kennen gelernt hast, kann man in einer Bruchgleichung für x nicht immer jede Zahl einsetzen, weil die Nenner bekanntlich nicht null werden dürfen. Wir müssen also von $\mathbb{Q}$ all die Zahlen wegnehmen, für die ein Nenner null wird. Dazu betrachten wir die Definitionsmengen der vorkommenden Bruchterme. So hat der im obigen Beispiel links stehende Bruchterm die Definitionsmenge $D_1 = \mathbb{Q}\setminus\{-3\}$. Der rechts stehende Bruchterm hat die Definitionsmenge $D_2 = \mathbb{Q}\setminus\{-\frac{11}{3}\}$. Die Definitionsmenge der Bruchgleichung ist daher die Menge

$D = \mathbb{Q}\setminus\{-\frac{11}{3}; -3\}$.

Das ist aber genau die Menge $D_1 \cap D_2$. Wir merken uns

> **Definition 56.1:** Die Definitionsmenge einer Bruchgleichung ist die Schnittmenge der Definitionsmengen aller vorkommenden Bruchterme.

Zur Bestimmung der Lösungsmenge der Bruchgleichung vom Beispiel 1 wenden wir Satz 14.1 an:

$$\frac{2x-1}{x+3} = \frac{6x-13}{3x+11} \quad \Leftrightarrow \quad (2x-1)(3x+11) = (x+3)(6x-13)$$

Wir erkennen, dass jeweils der Zähler des einen Bruchterms mit dem Nenner des anderen Bruchterms multipliziert wird. Diese Äquivalenzumformung nennen wir kreuzweises Multiplizieren.

> **Kreuzweises Multiplizieren**
>
> $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc$$

Die so entstandene Gleichung $(2x-1)(3x+11) = (x+3)(6x-13)$ lösen wir nun nach den aus der 7. Klasse bekannten Methoden. Dabei müssen wir aber bei allen Äquivalenzumformungen, die wir ausführen, bedenken, dass sie nur in der Definitionsmenge D gültig sind, d. h., dass nur Zahlen aus der Definitionsmenge D eingesetzt werden dürfen. Die gesamte Rechnung sieht dann so aus:

$$\frac{2x-1}{x+3} = \frac{6x-13}{3x+11}; \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{-\tfrac{11}{3}; -3\}$$

$$\begin{aligned}
(2x-1)(3x+11) &= (x+3)(6x-13) \\
6x^2+22x-3x-11 &= 6x^2-13x+18x-39 && \| -6x^2 \\
19x-11 &= 5x-39 && \| -5x+11 \\
14x &= -28 && \| :14 \\
x &= -2
\end{aligned}$$

Im Gegensatz zu früher können wir aus der letzten Zeile noch nicht schließen, dass $\{-2\}$ die Lösungsmenge unserer Ausgangsgleichung ist. Es könnte nämlich sein, dass die Zahl -2 nicht zur Definitionsmenge D der gegebenen Bruchgleichung gehört. Ein Blick auf D zeigt uns aber, dass $-2 \in D$ und dass somit tatsächlich $L = \{-2\}$ gilt. Unsere Bruchgleichung ist eindeutig lösbar.

Wir erinnern uns, dass wir aber auch schon nicht eindeutig lösbare Gleichungen kennen gelernt haben. Auch unter den Bruchgleichungen gibt es solche, wie einige der folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 2: $\dfrac{2-4x}{6-2x} = -\dfrac{2x+1}{3-x}; \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$

Beachte: Du musst das Minuszeichen der rechten Seite beim kreuzweisen Multiplizieren entweder zum Zähler oder zum Nenner nehmen! Wir entscheiden uns für den Zähler und denken uns die rechte Seite als $\dfrac{-2x-1}{3-x}$ geschrieben.

$$\begin{aligned}
(2-4x)(3-x) &= (6-2x)(-2x-1) \\
6-2x-12x+4x^2 &= -12x-6+4x^2+2x && \| -4x^2 \\
6-14x &= -10x-6 && \| +10x-6 \\
-4x &= -12 && \| :(-4) \\
x &= 3
\end{aligned}$$

Da $3 \notin D$ ist, gilt $L = \{\ \}$. Die durch die Bruchgleichung gegebene Information ist also widersprüchlich.

Beispiel 3: $\dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{x-2}{x-3}; \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{2; 3\}$

$$\begin{aligned}
(x-1)(x-3) &= (x-2)^2 \\
x^2-3x-x+3 &= x^2-4x+4 && \| -x^2 \\
-4x+3 &= -4x+4 && \| +4x-3 \\
0 \cdot x &= 1
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist widersprüchlich, also ist es auch die Bruchgleichung; somit gilt $L = \{\ \}$.

Beispiel 4: $\frac{2}{x^2} = -\frac{3}{2x}$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$$4x = -3x^2 \quad \| + 3x^2$$
$$3x^2 + 4x = 0$$
$$x(3x+4) = 0$$
$$x = 0 \vee 3x + 4 = 0$$
$$x = 0 \vee x = -\tfrac{4}{3}$$

Da $0 \notin D$ ist, gilt $L = \{-\frac{4}{3}\}$.

Die durch die Bruchgleichung gegebene Information ist eindeutig.

Beispiel 5: $\frac{x}{x+1} = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 1\}$

Auf das Anschreiben der Zwischenzeile mit den Produkten kann man verzichten und gleich kreuzweise ausmultiplizieren:

$$x^3 - x = x^3 - x^2 + x^2 - x \quad \| - x^3$$
$$-x = -x$$

Da diese Gleichung für alle Zahlen aus D erfüllt wird, ist $L = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 1\}$.

Die durch die Bruchgleichung gegebene Information ist also mehrdeutig.

Beispiel 6: $\frac{x - \frac{1}{3}}{x + \frac{1}{3}} = -3$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$

Hier scheint die kreuzweise Multiplikation nicht möglich zu sein. Wir denken uns aber -3 als $\frac{-3}{1}$ geschrieben und können dann kreuzweise multiplizieren:

$$x - \tfrac{1}{3} = -3(x + \tfrac{1}{3})$$
$$x - \tfrac{1}{3} = -3x - 1 \quad \| + 3x + \tfrac{1}{3}$$
$$4x = -\tfrac{2}{3} \quad \| : 4$$
$$x = -\tfrac{1}{6}$$

Da $-\frac{1}{6} \in D$ ist, gilt $L = \{-\frac{1}{6}\}$.

Aufgaben

1. a) $\frac{1}{x} = 1$ b) $\frac{1}{x} = 2$ c) $\frac{1}{x} = 0$ d) $\frac{1}{x} = \frac{5}{3}$

2. a) $\frac{3}{2x} = 5$ b) $\frac{7}{3x} = -\frac{1}{3}$ c) $\frac{12}{5x} = \frac{8}{7}$ d) $\frac{32}{15x} = \frac{16}{45}$

3. a) $\dfrac{1}{2x-1} = 2$ b) $\dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{3}{5x-1} = 0$

4. a) $3:(4x+5) = 6:7$ b) $-5:(9-2x) = -1$ c) $3{,}43:(x-1) - 3:8 = 0{,}5$

5. a) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2x-5}$ b) $\dfrac{13}{1+x} = \dfrac{1}{7x}$ c) $\dfrac{23}{2x} = \dfrac{17}{x}$

6. a) $\dfrac{38}{8x-11} = \dfrac{2}{x-11}$ b) $\dfrac{16}{8x-16} = \dfrac{8}{4x-3}$ c) $\dfrac{5}{9-6x} = \dfrac{3}{2x-3}$

7. a) $\dfrac{5x+6}{3x-8} = 1$ b) $\dfrac{16-23x}{11-5x} = 5$

c) $\dfrac{13x}{7+8x} = -1$ d) $\dfrac{2x-1}{-11x} = \dfrac{1}{2}$

8. a) $\dfrac{0{,}5x-3}{4{,}5-8x} = \dfrac{3}{4}$ b) $1{,}2 = \dfrac{15-0{,}1x}{x-20}$

c) $\dfrac{24x-1}{1-36x} = -\dfrac{3}{5}$ d) $\dfrac{7x+5}{3x-5} = 2\frac{4}{7}$

9. a) $(2x+6):x = 4$ b) $(18x+5):(3x+2) = 7$

c) $(5x-4):(4x+5) = 0$ d) $(4x-3):(0{,}75-x) = 0$

e) $(14x+5):(6x-1) = 7:3$ f) $\frac{3}{7}x:(5x-4) = \frac{3}{25}$

10. a) $\dfrac{2x+4}{3x-5} = \dfrac{5}{2}$ b) $\dfrac{5x+7}{8x+4} = \dfrac{7}{10}$

c) $\dfrac{9x+4}{6x+1} = \dfrac{8}{5}$ d) $\dfrac{13x+3}{7x+1} = \dfrac{15}{8}$

e) $\dfrac{32x-27}{5x+3} = \dfrac{3}{2}$ f) $\dfrac{17x+2}{23x-8} = \dfrac{18}{19}$

11. a) $\dfrac{16}{3x-4} = \dfrac{22}{2x+3}$ b) $\dfrac{19}{5x+4} = \dfrac{23}{8x-1}$

c) $\dfrac{13}{2x-3} = \dfrac{11}{x+3}$ d) $\dfrac{25}{4x+1} = \dfrac{17}{3x-1}$

e) $\dfrac{34}{5x+9} = \dfrac{21}{4x+1}$ f) $\dfrac{19}{5x-6} = \dfrac{37}{7x+2}$

12. a) $\frac{3}{x-1} = \frac{5}{2-2x}$ b) $\frac{x+7}{x-5} = \frac{x-1}{x+3}$

13. a) $\frac{3x^2-5x+23}{4x^2+3x-8} = \frac{3}{4}$ b) $\frac{5x^2-7x+8}{3x^2+2x-20} = \frac{5}{3}$

c) $\frac{8x^2-3x+4}{12x^2+5x-13} = \frac{2}{3}$ d) $\frac{12x^2-7x+5}{18x^2-11x+9} = \frac{2}{3}$

14. a) $\frac{5x^2-5x+8}{4x^2+3x+12} = \frac{2}{3}$ b) $\frac{7x^2-3x-15}{9x^2+x-25} = \frac{3}{5}$

c) $\frac{13x^2-5x+28}{3x^2+7x+35} = \frac{4}{5}$ d) $\frac{17x^2-x-28}{13x^2+12x-36} = \frac{7}{9}$

15. a) $\frac{3x-5}{7-4x} = \frac{6x-11}{15-8x}$ b) $\frac{7x+5}{15x-11} = \frac{7x-5}{15x-27}$

c) $\frac{12x+3}{5x-3} = \frac{24x-9}{10x-11}$ d) $\frac{8x-7}{6x+7} = \frac{12x-19}{9x+2}$

16. a) $\frac{9x-25}{5x-10} = \frac{7x-5}{4x-2}$ b) $\frac{6x-18}{7x+24} = \frac{11x-3}{13x+4}$

c) $\frac{9x-51}{5x-9} = \frac{7x+17}{4x+3}$ d) $\frac{5x-24}{3x+32} = \frac{7x+6}{9x-8}$

17. a) $\frac{x}{2x+3} = \frac{x}{2x-3}$ b) $\frac{6x}{7x-3} = \frac{6x-3}{7x}$

c) $\frac{x+1}{x+2} = \frac{x+3}{x+4}$ d) $\frac{x-5}{5x+3} = \frac{17-x}{1-5x}$

18. a) $\frac{5x+13}{2x+8} = \frac{15x+1}{6x}$ b) $\frac{3x-6}{x+5} = \frac{9x+1}{3x-2}$

c) $\frac{11x-8}{21-2x} = \frac{5-22x}{4x-2}$ d) $\frac{18x}{2x-27} = \frac{9x+7}{x-10}$

e) $\frac{0{,}8x+2}{2{,}5x+1} = \frac{4{,}8x+0{,}1}{15x-22}$ f) $\frac{\frac{x}{3}-1{,}1}{2x-3{,}75} = \frac{0{,}25-1{,}5x}{11-9x}$

19. a) $\frac{x}{3-x} = \frac{x}{x-3}$ b) $\frac{x}{x+2} = \frac{3x}{x-2}$ c) $\frac{x}{x-2} = \frac{x}{4-2x}$

20. a) $\frac{13x}{5-8x} - \frac{5x}{2x-1} = 0$ b) $\frac{5x}{3x-1{,}2} + \frac{3x}{5x-2} = 0$

21. a) $\dfrac{2x-6}{x-3}=\dfrac{4x-4}{3x+1}$ **b)** $\dfrac{x+3}{3x-5}-\dfrac{8x-3}{3x+5}=0$

22. a) $\dfrac{6-2x}{x-3}=\dfrac{3x-6}{2-x}$ **b)** $\dfrac{3x+20}{2x+5}+\dfrac{15x-35}{5-x}=0$

23. a) $\dfrac{2x+1}{3}\cdot\dfrac{2}{x}=\dfrac{5}{2x}\cdot\dfrac{3+2x}{4}$ **b)** $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\dfrac{2x}{x^2-1}=1$

24. a) $\dfrac{4x-x^2}{x-1}\cdot\dfrac{2-2x}{3x}=6$ **b)** $\left(\dfrac{3x+1}{2x}+\dfrac{3x+1}{3x}\right)\cdot\dfrac{x-1}{6x+2}=\dfrac{5}{x}$

25. a) $\dfrac{3x^2-5x}{x+1}\cdot\dfrac{1-x^2}{x}=0$ **b)** $\dfrac{2x+1}{2x}\cdot\dfrac{x^2+x}{4x^2-1}=1$

26. a) $\dfrac{2x+4}{x^2+2x}\cdot\dfrac{5x}{8-2x^2}=-1$ **b)** $\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}\right)\cdot\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{4}{x}-\dfrac{12}{x^2}\right)$

27. $\dfrac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}=\dfrac{\dfrac{x+1}{x}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$ **28.** $\dfrac{\dfrac{x-1}{x^2-4}}{\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{x}{x-2}}=\dfrac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{2x}{x+1}}$

29. $\dfrac{2}{\dfrac{3x+2\frac{1}{4}}{2x-\frac{1}{4}}+2}=\dfrac{3}{\dfrac{6x+4\frac{1}{2}}{2x-\frac{1}{4}}+2\frac{1}{2}}$

3.2 Multiplizieren mit dem Hauptnenner

Nun wenden wir uns schwierigeren Bruchgleichungen zu, bei denen das kreuzweise Multiplizieren nicht mehr so ohne weiteres möglich ist. Hier können wir die Bruchterme dadurch beseitigen, dass wir die Gleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren. Damit erhalten wir eine nennerfreie Gleichung. Hierzu

Beispiel 1: $1+\dfrac{2x^2}{25-4x^2}=\dfrac{5x+17}{10x+25}-\dfrac{16+3x}{8x^2-50}$

Hier macht schon die Bestimmung der Definitionsmenge einige Schwierigkeiten. Am einfachsten geht es, wenn wir zuerst den Hauptnenner bestimmen:

$25-4x^2=(5-2x)(5+2x)$	$2\cdot 5(-1)=-10$
$10x+25=5(2x+5)$	$2(2x-5)=4x-10$
$8x^2-50=2(4x^2-25)=2(2x-5)(2x+5)$	5

$\mathrm{HN}=2\cdot 5(2x-5)(2x+5)$

Da alle Nenner als Faktoren im Hauptnenner enthalten sind, kann man aus ihm die gefährlichen Zahlen ersehen, die wir aus $\mathbb{Q}$ entfernen müssen, um die Definitionsmenge zu erhalten:

$D=\mathbb{Q}\setminus\{-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\}$.

Nun multiplizieren wir die Gleichung mit dem Hauptnenner und erhalten:

$$\begin{aligned}1\cdot 2\cdot 5(2x-5)(2x+5)+2x^2(-10)&=(5x+17)(4x-10)-(16+3x)\cdot 5\\ 40x^2-250-20x^2&=20x^2-50x+68x-170-80-15x\\ 20x^2-250&=20x^2+3x-250 \quad \|-20x^2+250\\ 0&=3x\\ 0&=x\end{aligned}$$

Da $0\in D$, gilt $L=\{0\}$.

Wenn sich jemand die Arbeit ersparen will, den Hauptnenner zu bestimmen, dann multipliziert er gleich mit dem Produkt der Nenner und erreicht damit auch eine nennerfreie Gleichung. Diese Gleichung ist aber meist schwieriger oder gar nicht zu lösen, weil sie höhere Potenzen von x enthält, die dadurch entstehen, dass man nicht mit dem kleinstmöglichen gemeinsamen Nenner multipliziert hat. Zur Warnung diene

Beispiel 2:

$$\frac{15}{x-2}-\frac{4}{x+2}=\frac{5}{x^2-4} \quad \|\cdot(x-2)(x+2)(x^2-4);\ D=\mathbb{Q}\setminus\{-2;2\}$$

$$\begin{aligned}15(x+2)(x^2-4)-4(x-2)(x^2-4)&=5(x-2)(x+2)\\ 15x^3+30x^2-60x-120-4x^3+8x^2+16x-32&=5x^2-20\\ 11x^3+38x^2-44x-152&=5x^2-20 \quad \|-5x^2+20\\ 11x^3+33x^2-44x-132&=0 \quad \|:11\\ x^3+3x^2-4x-12&=0\end{aligned}$$

Diese Gleichung kannst du noch nicht lösen. Vergleiche dazu jedoch Aufgabe 63/**1**.

Aufgaben

1. Löse Beispiel 2 mithilfe des Hauptnenners.

2. a) $\frac{3}{x} + 2 = \frac{9}{x} - 2$ b) $2\left(\frac{1}{x} - 7\right) + \left(\frac{5}{x} + 7\right) = 0$

c) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x} + 7 = \frac{8}{x} - 3$ d) $\frac{5}{x} - \frac{6}{x} + 1 = \frac{1{,}2}{x}$

3. a) $\frac{4}{x} - \frac{1}{2x} + 2 = \frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{5x} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3x} - \frac{4}{9}$

c) $\frac{1}{3} - \frac{13}{x} + \frac{1}{13x} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x}$

d) $\frac{3}{8} + \frac{2}{3x} - \frac{5}{6x} - \frac{13}{15} + \frac{8}{5x} + \frac{11}{12x} = \frac{31}{40}$

4. a) $\frac{6}{x-2} - \frac{3}{x-2} + 3 = 0$ b) $\frac{18}{2x-3} + \frac{3}{3-2x} = 5$

5. a) $\frac{2}{1-x} - \frac{3}{5(1-x)} + \frac{5}{4(x-1)} = \frac{3}{10}$

b) $\frac{1}{5x+2} + \frac{3}{6+15x} = \frac{7}{25x+10}$

c) $\frac{4{,}5}{1-14x} - \frac{7{,}5}{0{,}5-7x} = \frac{69}{28x-2} - 0{,}5$

d) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3x-7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{22}{14-6x} = \frac{3}{7-3x}$

6. a) $\frac{8}{x+3} - \frac{1}{7-x} = \frac{4}{x+3}$ b) $\frac{15}{8-x} - \frac{7}{8+x} - \frac{6}{8-x} = 0$

c) $\frac{7}{2x+3} + \frac{11}{3x+2} - \frac{33}{2(2+3x)} = 0$ d) $\frac{68}{3(2x-5)} + \frac{51}{5-2x} + \frac{30}{x} = 0$

7. a) $\frac{8}{6x-9} - \frac{35}{10x+4} = \frac{2}{2x-3}$ b) $\frac{21}{15x-4} - \frac{42}{8-30x} = \frac{138}{45x-6}$

c) $\frac{27}{2x+11} - \frac{1}{2x-11} - \frac{72}{11+2x} = \frac{2}{11-2x}$

8. a) $\frac{18}{5x+6} + \frac{1}{10x-3} - \frac{8}{x+1{,}2} + \frac{1}{x-0{,}3} = 0$

b) $\dfrac{13}{3x-11} - \dfrac{13}{4x+5} - \dfrac{13}{12x+15} = 0$

c) $\dfrac{1}{x-7} + \dfrac{2}{14-2x} + \dfrac{3}{2x-5} = \dfrac{21}{14x-35}$

d) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{30}{x^2-1}$

9. a) $\dfrac{1}{2x+3} + \dfrac{1}{2x-3} + \dfrac{2}{4x^2-9} = 0$

b) $\dfrac{5}{5x+4} + \dfrac{2}{5x-4} + \dfrac{2}{16-25x^2} = 0$

c) $\dfrac{46}{9x^2-121} + \dfrac{1}{3x+11} = \dfrac{23}{11-3x}$

d) $\dfrac{3}{3x-6} + \dfrac{1}{2x-4} - \dfrac{15}{4(x-2)^2} = 0$

10. a) $\dfrac{38}{x^2+16x+64} - \dfrac{7}{4x+32} = \dfrac{3}{x+8}$!

b) $\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{3}{x+5} + \dfrac{2}{x^2+4x-5} = 0$!

11. a) $\dfrac{1}{3x-2} + \dfrac{7}{2x+3} = \dfrac{35}{6x^2+5x-6}$!

b) $\dfrac{3x-5}{x} - \dfrac{2x}{x+5} = 1$

c) $\dfrac{5x}{x+3} - \dfrac{8x}{x+2} + 3 = 0$

12. a) $\dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x-1}{x-2} = 2$

b) $\dfrac{x-2}{x+1} + \dfrac{2x-1}{x-1} = 3$

c) $\dfrac{3x-7}{3x+1} - \dfrac{6x+4}{x+1} + 5 = 0$

d) $\dfrac{13x+26}{x+2} + \dfrac{6-2x}{x-3} = 11$

13. a) $\dfrac{7-6x}{4x+1} + \dfrac{9x+4}{3x+7} - 1{,}5 = 0$

b) $\dfrac{5x+7}{3+x} - \dfrac{12x-4}{9x+3} = \dfrac{11}{3}$

c) $\dfrac{x+5}{x} - \dfrac{4}{1-x} = \dfrac{x+7}{x-1}$

d) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2x}{x-2} + \dfrac{3x+1}{3x-6} = 0$

14. a) $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{3x+2}{6-2x} = \dfrac{5x}{2x-1}$

b) $\dfrac{5x+1}{5x-3} - \dfrac{3x+16}{2x+18} + \dfrac{0{,}5x}{x-0{,}6} = 0$

15. $\dfrac{2x-11}{7x+35}+\dfrac{4-3x}{2x+3}+\dfrac{3x+4}{2x+10}=\dfrac{2}{7}$

•16. $\dfrac{x-2}{x+3}+\dfrac{4x-3}{2-x}-\dfrac{7-6x}{2x-4}+\dfrac{x+5}{0{,}2x+0{,}6}=5$

17. a) $\dfrac{0{,}5x}{2x-3}+\dfrac{2x+3}{x+2}=\dfrac{x}{4x-6}$ **b)** $\dfrac{x+4}{x+2}+\dfrac{8}{x^2-4}=\dfrac{2x-2}{x-2}$

18. a) $\dfrac{2}{2x-3}+\dfrac{2x+4}{2x+3}-\dfrac{6}{9-4x^2}=0$

b) $\dfrac{11}{x^2-25}+\dfrac{3x-9}{5-x}+\dfrac{2x+28}{3x+15}=0$

•19. $\dfrac{x}{4x+10}+\dfrac{10x^2-30x+6}{4x^2-25}-\dfrac{3x-2}{x+2{,}5}+\dfrac{x^2+1}{x^2-6{,}25}=\dfrac{3}{4}$

20. $\dfrac{3x+2}{2x-1}+\dfrac{x+1}{6x+3}=2-\dfrac{4x^2-22x-11}{12x^2-3}$

21. a) $\dfrac{x+1}{x-2}-\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{18}{x^2-4}$ **b)** $\dfrac{x-2}{x+3}+\dfrac{25-x}{x-3}+\dfrac{55}{x^2-9}=0$

22. a) $\dfrac{9-x}{2x-3}+\dfrac{3x+4{,}5}{9+6x}+\dfrac{195}{9-4x^2}=0$

b) $\dfrac{5x-3}{x-5}-\dfrac{5x+26}{x-3}=\dfrac{25}{x^2-8x+15}$

23. a) $\dfrac{3x+1}{x-7}+\dfrac{3-3x}{x+7}=\dfrac{177x+7}{4x^2-196}$

b) $\dfrac{9x+4}{3x-12}-\dfrac{12x-3}{4x+16}-\dfrac{50x+25}{2x^2-32}=0$

24. a) $\dfrac{7-7x}{9x^2-30x+25}+\dfrac{8-3x}{9x-15}=\dfrac{4-5x}{15x-25}$

b) $\dfrac{4x+3}{5x-7}-\dfrac{3x+1}{5x+7}=\dfrac{5x^2+x-28}{25x^2-49}$

25. $\dfrac{2x-13}{x-1}+\dfrac{5x+3}{x-8}-\dfrac{7x^2+8}{x^2-9x+8}=0$

26. $\dfrac{6x^2-23x-3}{x^2-2x-15}-\dfrac{10x-15}{x+3}=\dfrac{30-4x}{x-5}$

27. $\dfrac{7x}{3x-8} - \dfrac{20+4x}{3x+8} + \dfrac{3x-35}{18x^2-128} = 1$

28. $\dfrac{\dfrac{x-1}{x-3} + \dfrac{x-3}{x-1} - 2}{\dfrac{x-1}{x-3} - \dfrac{x-3}{x-1}} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{x}{x-2}$

29. $\left(\dfrac{\dfrac{3x}{2} - \dfrac{2}{3x}}{\dfrac{3x-2}{3}} - \dfrac{3x-5}{2x-3}\right) \cdot 2x = 1 + \dfrac{6x}{2x-3}$

30. $\dfrac{\dfrac{1}{x} - 2}{\dfrac{x}{3} + 1} + \dfrac{x-1}{x+3} = 1 - \dfrac{2x+5}{x^2+3x}$

31. $\dfrac{\dfrac{2-3x}{x}}{\dfrac{x}{x-1}} + \dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x+2}{2}} = \dfrac{4+5x}{x^2} - 3$

32. $\dfrac{x}{x + \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x}}} : \dfrac{1}{x^2+2} = x^2 + 1$

33. Aus der *Algebra* des AL-CHARIZMI: Die Differenz zweier Zahlen ist 2. Teilt man die kleinere durch die größere, so erhält man $\frac{1}{2}$. Wie groß sind die Zahlen?

34. Die Summe zweier Zahlen ist 425. Dividiert man die größere durch die kleinere, dann erhält man 2, und es bleibt der Rest 92. Wie heißen die Zahlen?

35. Der Zähler eines Bruchs ist um 12 größer als der Nenner. Zieht man die Ganzen heraus, dann ergibt sich die gemischte Zahl $3 + \frac{2}{x}$. Bestimme x.

36. Hans möchte wissen, wie alt Renate ist. Weil sie weiß, dass er schwach im Rechnen ist, sagt sie: »Wenn du den Kehrwert meines Alters in 15 Jahren vom Kehrwert meines heutigen Alters subtrahierst, dann erhältst du den Kehrwert meines Alters in 15 Jahren.« Wie alt ist Renate heute?

37. Ein Gasherd mit zwei Brennern wird aus einer Propangasflasche gespeist. Mit einer Füllung kann der eine Brenner 30 Std., der andere 20 Std. bei voller Flamme versorgt werden. Wie lange reicht der Flascheninhalt, wenn beide Brenner gleichzeitig in Betrieb sind?

38. Der holländische Arzt und Mathematiker Reinerus GEMMA FRISIUS (1508–1555) stellte in seinem 1544 in Wittenberg gedruckten *Arithmeticae practicae methodus facilis** folgende Aufgabe (Teil 3, Beispiel 6):
Potator quidam solus exhaurit cadum vini in 20 diebus, verum si uxor eum iuverit servata proportione bibendi 12 diebus vini tantundem absumunt, quanto ergo tempore sola uxor totum vas exhauriet?
Ein Trinker leert einen Krug Wein in 20 Tagen. Wenn seine Ehefrau ihm aber hilft, dann verbrauchen sie ebenso viel Wein in 12 Tagen, falls sie das Verhältnis, in dem sie trinken, beibehalten. In welcher Zeit würde also die Ehefrau allein das ganze Gefäß austrinken?

Abb. 67.1 Reinerus GEMMA FRISIUS, eigentlich Rainer VAN DEN STEEN (8.12.1508 Dockum/Ostfriesland – 25.5.1555 Löwen) 1541 Professor der Medizin an der Universität von Löwen

39. Ein Wasserbehälter hat zwei Zuflussröhren. Mittels der ersten Röhre allein kann der Behälter in 6 Std., mittels der zweiten in 4 Std. gefüllt werden. Wie lange dauert das Füllen, wenn beide Röhren gleichzeitig in Betrieb sind?

40. Der Kaltwasserhahn füllt eine Badewanne in 10 min. Dreht man zusätzlich den Warmwasserhahn auf, dann dauert es nur 6 min, bis die Wanne voll ist. Wie lange würde es dauern, wenn man die Wanne nur mit dem Warmwasserhahn füllen wollte?

•**41.** Ein Teich wird durch einen Zufluss in 10 Stunden und durch einen zweiten in 5 Stunden gefüllt. Der Abfluss leert ihn in 4 Stunden. Nun werden alle zwei Zuflüsse und der Abfluss gleichzeitig geöffnet. Wie lange dauert es jetzt, bis der Teich voll ist?

•**42.** Ein Dampfkraftwerk ist mit zwei Kesseln von verschiedener Leistungsfähigkeit ausgestattet. Der Inhalt des vollen Kohlenbunkers reicht aus, um den ersten Kessel allein 18 Tage bzw. beide Kessel zusammen $7\frac{1}{5}$ Tage zu beheizen. Wie lange könnte mit derselben Kohlenmenge der zweite Kessel allein betrieben werden?

* »Ein leichter Weg zur Beherrschung der Arithmetik«, geschrieben um 1536, veröffentlicht 1540 in Antwerpen. Das Büchlein war so beliebt, dass es im 16. Jh. mindestens 59 Auflagen erlebte.

⁝43. Zum Ausheben einer Baugrube wird ein Bagger verwendet, der die gesamte Arbeit in 8 Tagen erledigen würde. Um schneller voranzukommen, wird nach 3 Tagen noch ein zweiter Bagger eingesetzt, der den gesamten Aushub in 12 Tagen allein bewältigen könnte. Wieviel Tage müssen beide Maschinen noch gemeinsam in Betrieb sein?

⁝44. Ein Arbeiter würde eine Arbeit in 18 Tagen allein fertigstellen. Nach 8 Tagen erhält er eine Hilfskraft, deshalb ist die Arbeit schon nach insgesamt 14 Tagen fertig. Wie lange hätte die Hilfskraft allein für den Rest der Arbeit gebraucht, wenn der Arbeiter nach 8 Tagen krank geworden wäre?

45. Aus dem *Trattato di aritmetica* (1491) des Filippo Calandri (geb. um 1430):
Es sind 3 Männer in einem Gefängnis, die ausbrechen wollen; der erste sagt, dass er in 6 Stunden das Gefängnis aufbrechen werde, der zweite sagt, dass er es in 12 Stunden aufbrechen werde, und der dritte sagt, dass er es in 18 Stunden aufbrechen werde. Die Frage ist, wenn alle 3 zusammenarbeiten, in welcher Zeit sie dann das Gefängnis aufbrechen werden.

46. a) Welche Zahl muss zu dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{17}{25}$ addiert werden, damit er den Wert $\frac{3}{4}$ erhält?

b) Welche Zahl muss von dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{11}{16}$ subtrahiert werden, damit er den Wert $\frac{1}{2}$ erhält?

c) Welche Zahl muss zu dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{12}{19}$ addiert werden, damit er das arithmetische Mittel zu $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ wird?

•d) Um welche Zahl muss man den Zähler und Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$ **1)** vermehren, **2)** vermindern, um $\frac{c}{d}$ zu erhalten?

•e) Welche Zahl muss von dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$ subtrahiert und zu dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{c}{d}$ addiert werden, damit zwei gleich große Brüche entstehen?

•47. a) Vermehrt man den Zähler eines Bruches mit dem Wert $\frac{4}{7}$ um 16 und vermindert seinen Nenner um 5, so erhält man seinen reziproken Wert. Wie heißt der Bruch?

b) Vermehrt man den Zähler eines Bruches mit dem Wert $\frac{2}{3}$ um 4 und seinen Nenner um 3, so erhält er den Wert $\frac{3}{4}$. Wie heißt der Bruch?

c) Vermindert man den Zähler eines Bruches mit dem Wert $\frac{4}{5}$ um 8 und vermehrt seinen Nenner um 2, so erhält er den Wert $\frac{1}{2}$. Wie heißt er?

d) Ein Bruch mit dem Wert $\frac{5}{6}$ wird doppelt so groß, wenn man seinen Zähler um 5 vermehrt und seinen Nenner um 6 vermindert. Wie heißt der Bruch?

•48. a) Vermehrt man den Zähler und Nenner eines Bruches mit dem Wert $\frac{4}{5}$ um 9 und zieht den entstandenen Bruch von $\frac{37}{30}$ ab, so erhält man $\frac{2}{5}$. Wie heißt der Bruch?

b) Vermindert man den Zähler und Nenner eines Bruches mit dem Wert $\frac{5}{6}$ um 5 und zieht den entstandenen Bruch von $\frac{22}{15}$ ab, so erhält man $\frac{2}{3}$. Wie heißt der Bruch?

c) Ein Bruch hat den Wert $\frac{5}{8}$. Vermehrt man seinen Zähler um 3 und vermindert seinen Nenner um 4, so erhält man dasselbe, wie wenn man seinen Zähler um 10 und seinen Nenner um 5 vermehrt. Wie heißt der Bruch?

49. a) Die Zahl 240 wird so in zwei Teile zerlegt, dass der Quotient aus
1) den beiden Teilen gleich $\frac{3}{7}$ ist,
2) dem größeren Teil und der Differenz der Teile gleich $\frac{13}{6}$ ist,
3) dem kleineren Teil und der Differenz der Teile gleich $\frac{5}{6}$ ist.
Wie groß sind die Teile?

b) Die Zahl 68 wird so in zwei Teile zerlegt, dass $\frac{1}{3}$ des ersten um 12 größer ist als $\frac{1}{5}$ des anderen. Wie groß sind die Teile?

c) Die Zahl 100 wird so in zwei Teile zerlegt, dass $\frac{2}{5}$ des ersten um 6 kleiner ist als $\frac{3}{4}$ des anderen. Wie groß sind die Teile?

d) Die Zahl 123 wird so in drei Teile zerlegt, dass der erste um 5 größer ist als der zweite und $\frac{1}{3}$ des ersten mit $\frac{1}{4}$ des zweiten zusammen 6 mehr betragen als die Hälfte des dritten. Wie groß ist der erste Teil?

3.3 Proportionen

Den Bruch $\dfrac{a}{b}$ bezeichnet man auch als das **Verhältnis von *a* zu *b***. Eine Gleichung, die die Gleichheit zweier Verhältnisse zum Ausdruck bringt, nennt man **Verhältnisgleichung** oder **Proportion***. In Verhältnisgleichungen schreibt man die beiden Quotienten statt mit Bruchstrich meist mit Doppelpunkt, also

$$a : b = c : d \quad \text{an Stelle von} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Die Gleichung $a : b = c : d$ liest man

»*a* verhält sich zu *b* wie *c* zu *d*«.

a und *d* heißen **Außenglieder**, *b* und *c* **Innenglieder** der Proportion:

Innenglieder

$$a : b = c : d$$

Außenglieder

* proportio (lat.) = Verhältnis, Ebenmaß

Selbstverständlich müssen b und d von null verschieden sein. – Die Glieder einer Proportion können natürlich auch Terme mit Variablen sein.

Mit den oben eingeführten Namen gewinnt man aus Satz 14.1 eine Regel zur Umformung von Proportionen, die wir uns merken wollen als

Satz 70.1: In einer Proportion ist das Produkt der Außenglieder gleich dem Produkt der Innenglieder,* d.h.,

$$\boldsymbol{a : b = c : d \quad \Rightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c}$$

Beispiel:
$$3x^2 : (x-1) = (x+1) : (2x^3)$$
$$3x^2 \cdot 2x^3 = (x-1)(x+1)$$
$$6x^5 = x^2 - 1$$

** Zur Geschichte der Proportionen

Verhältnisse kommen bereits bei den Ägyptern im *Papyrus Rhind* und auch bei den Babyloniern vor, eine Theorie der Verhältnisse entwickelten jedoch erst die Griechen. Angeblich soll Pythagoras (um 570–497/6 v. Chr.) die Lehre von den Verhältnissen erfunden haben. Er und seine Schüler, die Pythagoreer, waren der Ansicht, dass sich alle Erscheinungen der Natur auf Verhältnisse von natürlichen Zahlen zurückführen ließen. So erklingen zwei Saiten, deren Längen sich wie 2 : 1 verhalten, im Grundton und der Oktave. Bis in die Neuzeit hinein dienten und dienen Verhältnisgleichungen dazu, funktionale Zusammenhänge zweier Größen zu beschreiben. So lernt man noch heute in der Fahrschule, dass bei Verdoppelung der Geschwindigkeit der Bremsweg viermal so lang, bei Verdreifachung aber neunmal so lang wird, dass sich also allgemein die Bremswege wie die Quadrate der zugehörigen Geschwindigkeiten verhalten, kurz, dass $s_1 : s_2 = v_1^2 : v_2^2$ gilt. Den genauen Zusammenhang zwischen Bremsweg und Geschwindigkeit drückt man heute aber durch eine Funktionsgleichung aus, die du in der 11. Klasse lernen wirst. Erst mit der Erfindung der Buchstabenrechnung durch François Viète (1540–1603) wurde es möglich, solche Funktionsgleichungen aufzustellen, und seitdem haben Verhältnisse immer mehr an Bedeutung verloren.
Die Lehre von den Proportionen brachte Eudoxos aus Knidos (um 400–um 347 v. Chr.) zu einem mustergültigen Abschluss. Euklid (um 340–um 270 v. Chr.) benützte dessen Darstellung als Vorlage für Buch V seiner *Elemente*.
Das Verhältnis zweier Größen nannten bereits die Pythagoreer *λόγος* (lógos), und wenn zwei Paare dem Verhältnisse nach (= *ἀνὰ λόγον* [aná lógon]) gleich waren, so nannten sie dieses Gleichsein der Verhältnisse *ἀναλογία* (analogía). Die klassische lateinische Übersetzung für *λόγος* (Verhältnis) ist *ratio*; die *ἀναλογία* (Verhältnisgleichheit) übersetzt Marcus Tullius Cicero (106–43 v. Chr.) mit dem seltenen lateinischen Wort *proportio*. Boethius (um 480–524 (?)) hingegen verwendet *proportio* für das Verhältnis und bezeichnet die Verhältnisgleichung mit *proportionalitas*. Dieses Übersetzungsdurcheinander spiegelt sich in der lateinischen mittelalterlichen Literatur wider und geht auch ins Deutsche ein, bis sich schließlich in der 2. Hälfte des 18. Jh.s die Aus-

* Diesen Sachverhalt formuliert Euklid als Satz 19 in Buch VII seiner *Elemente* (= *στοιχεῖα* [stoicheia]).

1644
Abb. 71.1 William Oughtred
(5.3.1574 Eton – 30.6.1660 Albury)

1566
Abb. 71.2 Robert Record(e)
(1510(?) Tenby – 1558 London)

drücke **Verhältnis** und für Verhältnisgleichung **Proportion** durchsetzen; Verhältnis tritt 1667 bei Johann Christoph Sturm (1635–1703) in seiner Übersetzung von Archimedes' *Sandrechnung* erstmals auf, Proportion 1694 bei Anton Ernst Burckhart von Pirckenstein. **Äußeres** und **inneres Glied** verbreiten sich im 18. Jh. vor allem durch Johann Andreas von Segners (1704–1777) *Deutliche und vollständige Vorlesungen über Rechenkunst und Geometrie* (1747) und durch Abraham Gotthelf Kästners (1719 bis 1800) *Anfangsgründe* (1758).

Die erste brauchbare Schreibweise für Proportionen, nämlich A.B::C.D, schuf 1631 der englische Landpfarrer William Oughtred (1574–1660), der in seiner *Arithmeticae in numeris et speciebus institutio: Quae tum logisticae, tum analyticae, atque adeo totius mathematicae, quasi clavis est* an die 150 mathematische Symbole erfand, u.a. auch das schräg liegende Multiplikationskreuz ×. Seine Frau soll eine Geizhälsin gewesen sein und ihm nicht erlaubt haben, nach dem Abendessen Kerzen anzuzünden, sodass so manch guter Einfall verloren gegangen und so manches Problem ungelöst geblieben sei.

1651 schreibt der englische Mathematiker und Astronom Vincent Wing (1619–1668) in seinem *Harmonicon coeleste* A:B::C:D, wobei der Doppelpunkt keineswegs als Divisionszeichen aufgefasst werden darf; denn ein Verhältnis und eine Division waren zwei ganz verschiedene Operationen! Wings Schreibweise breitet sich rasch über Europa aus und hat sich in Großbritannien und den USA bis ins 20. Jh. gehalten. Das 1557 von dem Engländer Robert Record(e) (1510(?)–1558) erfundene Gleichheitszeichen verwendet 1639 als erster auf dem Kontinent der Holländer Jan Jansse Stampioen de Jonghe (1610– nach 1685); für die Proportion schreibt er A,,B = C,,D. 1678/79 benützt Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) den Doppelpunkt sowohl als Divisionszeichen wie auch als Zeichen für das Verhältnis. 1684 verwendet er den Doppelpunkt als Divisionszeichen in einer Veröffentlichung, und 1693 lehnt er Sonderzeichen für die Proportion ab. Es genüge, so meint er, die Schreibweise $a : b = c : d$, die sich schnell im kontinentalen Europa durchsetzt.

Aufgaben

1. Oft gelingt es, ein Verhältnis großer Zahlen, das sehr unanschaulich ist, in ein Verhältnis kleinerer Zahlen umzuformen, nämlich dann, wenn man den Bruch kürzen kann. Dazu ein

Beispiel: $1029 : 1911 = \frac{1029}{1911} = \frac{7}{13} = 7 : 13.$

Gekürzt wurde mit 143.

Drücke ebenso folgende Verhältnisse durch Verhältnisse teilerfremder ganzer Zahlen aus:

a) $102 : 153$ **b)** $0{,}05 : 0{,}7$ **c)** $2{,}25 : 0{,}18$ **d)** $1\frac{2}{3} : 3{,}5$
e) $\frac{2}{3} : \frac{5}{12}$ **f)** $\frac{17}{64} : \frac{68}{256}$ **g)** $(-3) : 15{,}9$ **h)** $\frac{-7}{11} : (-2\frac{6}{11})$

2. Welchen Wert muss x in den folgenden Proportionen haben?

a) $x : 8 = 3 : 2$ **b)** $15 : (2x) = 2{,}4 : 5$
c) $25 : 45 = (4x + 3) : 27$ **d)** $7x^2 : 99 = 0 : 999$
e) $(5 - 7x) : (2x) = (-19) : 4$ **f)** $5 : (x + 1) = 1 : (1 - x)$
g) $0 : (x - 1) = (x + 1) : (x + 2)$ **h)** $(2x + 3) : (7 - x) = (3 - 2x) : (x + 7)$

3. Berechne diejenigen Zahlen, für die gilt:

a) $x : y = 2 : 3; \quad x + y = 45$
b) $x : y = 3 : 5; \quad x + y = -16$
c) $x : y = (-1) : 3; \quad x + y = 14$
d) $x : y = 1 : (-3); \quad x + y = -14$
e) $x : y = 11 : 5; \quad x - y = 6$
f) $x : y = 10 : 7; \quad x - y = 6$

4. Berechne zu a, b, c die so genannte **4. Proportionale**; das heißt, löse die Gleichung $a : b = c : x$.

a) $a = 8;\ b = 3;\ c = 24$ **b)** $a = -1;\ b = 5;\ c = 3$
c) $a = \frac{2}{3};\ b = 1\frac{3}{5};\ c = \frac{1}{2}$ **d)** $a = 0{,}27;\ b = 2{,}43;\ c = 16{,}2$

5. **Umformen von Proportionen**. Beweise für $a, b, c, d \neq 0$ die Richtigkeit der folgenden Behauptungen:

a) In einer Proportion dürfen die Innenglieder miteinander vertauscht werden, d.h.,

$\boldsymbol{a : b = c : d \Leftrightarrow a : c = b : d}$; z.B.: $7 : 5 = 35 : 25 \Leftrightarrow 7 : 35 = 5 : 25$.

(EUKLID: *Elemente*, V, Satz 16 und VII, Satz 13)

b) In einer Proportion dürfen die Außenglieder miteinander vertauscht werden, d.h.,

$\boldsymbol{a : b = c : d \Leftrightarrow d : b = c : a}$; z.B.: $7 : 5 = 35 : 25 \Leftrightarrow 25 : 5 = 35 : 7$.

c) In einer Proportion dürfen die Innenglieder mit den Außengliedern vertauscht werden, d.h.,

$\boldsymbol{a : b = c : d \Leftrightarrow b : a = d : c}$; z.B.: $7 : 5 = 35 : 25 \Leftrightarrow 5 : 7 = 25 : 35$.

•6. Korrespondenz-Umformungen*

a) Beweise die Richtigkeit folgender Behauptungen, vorausgesetzt, alle Nenner sind von null verschieden:

1) Korrespondierende Addition:

$\boldsymbol{a : b = c : d \Leftrightarrow (a+b) : b = (c+d) : d}$

(EUKLID: *Elemente*, V, Satz 18)

2) Korrespondierende Subtraktion:

$\boldsymbol{a : b = c : d \Leftrightarrow (a-b) : b = (c-d) : d}$

(EUKLID: *Elemente*, V, Satz 17)

3) $\boldsymbol{a : b = c : d \Leftrightarrow (a+b) : (a-b) = (c+d) : (c-d)}$

b) Leichter lassen sich diese Umformungen merken, wenn man sie in Bruchform anschreibt. Mach's!

•7. Mit den Umformungen aus Aufgabe **5** und **6** lassen sich Proportionen vereinfachen, wenn man es geschickt anfängt.

Beispiel:

$(a-x) : (b-x) = (a+x) : x$	
$(a-b) : (b-x) = a : x$	korrespondierende Subtraktion
$(a-b) : a = (b-x) : x$	Vertauschung der Innenglieder
$(2a-b) : a = b : x$	korrespondierende Addition
$x : b = a : (2a-b)$	Vertauschung der Innen- und der Außenglieder und der beiden Seiten

Vereinfache auf entsprechende Art und Weise:

a) $(19+x) : x = 4 : 3$ **b)** $(15-a) : a = 2 : 3$

c) $(a-b) : b = (c-d) : d$ **d)** $(a+b) : b = (d+c) : d$

e) $(24+3a) : a = 63 : 5$ **f)** $(8-3a) : 2 = 3a : 9$

g) $(2a+3b+x) : (2a+3b-x) = 4a : (6b)$

8. In einem rechtwinkligen Dreieck verhalten sich die beiden spitzen Winkel wie $7:11$. Wie groß sind sie?

9. a) Zwei Zahlen verhalten sich wie 6 zu 7. Vermindert man die erste um 4 und vermehrt die andere um 2, so verhält sich die Differenz zu der Summe wie 2 zu 3. Wie heißen die Zahlen?

b) Vermehrt man den Zähler und Nenner des Bruches $\frac{5}{16}$ um Zahlen, die sich wie 3 zu 4 verhalten, so erhält man $\frac{5}{9}$. Wie heißen diese Zahlen?

c) Vermindert man den Zähler und Nenner des Bruches $\frac{33}{40}$ um Zahlen, die sich wie 3 zu 4 verhalten, so erhält man $\frac{7}{8}$. Wie heißen diese Zahlen?

d) Welche Zahl muss man vom Zähler und Nenner des Bruches $\frac{119}{142}$ subtrahieren, damit der entstandene Bruch sich zu $\frac{5}{8}$ wie $3\frac{1}{2} : 2\frac{2}{3}$ verhält?

* correspondēre (lat.) = miteinander in Einklang stehen

10. Im Kochbuch *Das gelingt* aus dem Ehrenwirth Verlag steht ein Rezept für »König Ludwigs Lieblingskuchen«: Für den Teig benötigt man 200 g Butter, 250 g Mehl, 80 g Zucker und 4 Esslöffel (EL) Weißwein. Der Belag entsteht aus 600 g Äpfeln, 1 EL Zucker, etwas Zitronenschale und $1\frac{1}{2}$ EL Wasser. Wie viel von den Zutaten muss man nehmen, wenn man nur 125 g Butter hat?