



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

3.1 Kreuzweises Multiplizieren

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83513](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83513)

3 Bruchgleichungen

3.1 Kreuzweises Multiplizieren

Eine Gleichung, in der Bruchterme vorkommen, bei denen wenigstens ein Nenner eine Unbekannte enthält, nennen wir kurz **Bruchgleichung**. Die einfachste Form einer Bruchgleichung liegt vor, wenn auf der linken und auf der rechten Seite je ein Bruchterm steht. Hierzu

Beispiel 1:
$$\frac{2x-1}{x+3} = \frac{6x-13}{3x+11}.$$

Im Gegensatz zu den Gleichungen, die du in der 7. Klasse kennen gelernt hast, kann man in einer Bruchgleichung für x nicht immer jede Zahl einsetzen, weil die Nenner bekanntlich nicht null werden dürfen. Wir müssen also von $\mathbb{Q}$ all die Zahlen wegnehmen, für die ein Nenner null wird. Dazu betrachten wir die Definitionsmengen der vorkommenden Bruchterme. So hat der im obigen Beispiel links stehende Bruchterm die Definitionsmenge $D_1 = \mathbb{Q} \setminus \{-3\}$. Der rechts stehende Bruchterm hat die Definitionsmenge $D_2 = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{11}{3}\}$. Die Definitionsmenge der Bruchgleichung ist daher die Menge

$$D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{11}{3}; -3\}.$$

Das ist aber genau die Menge $D_1 \cap D_2$. Wir merken uns

Definition 56.1: Die Definitionsmenge einer Bruchgleichung ist die Schnittmenge der Definitionsmengen aller vorkommenden Bruchterme.

Zur Bestimmung der Lösungsmenge der Bruchgleichung vom Beispiel 1 wenden wir Satz 14.1 an:

$$\frac{2x-1}{x+3} = \frac{6x-13}{3x+11} \Leftrightarrow (2x-1)(3x+11) = (x+3)(6x-13)$$

Wir erkennen, dass jeweils der Zähler des einen Bruchterms mit dem Nenner des anderen Bruchterms multipliziert wird. Diese Äquivalenzumformung nennen wir **kreuzweises Multiplizieren**.

Kreuzweises Multiplizieren

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Die so entstandene Gleichung $(2x-1)(3x+11) = (x+3)(6x-13)$ lösen wir nun nach den aus der 7. Klasse bekannten Methoden. Dabei müssen wir aber bei allen Äquivalenzumformungen, die wir ausführen, bedenken, dass sie nur in der Definitionsmenge D gültig sind, d. h., dass nur Zahlen aus der Defi-

initionsmenge D eingesetzt werden dürfen. Die gesamte Rechnung sieht dann so aus:

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{x+3} &= \frac{6x-13}{3x+11}; \quad D = \mathbb{Q} \setminus \left\{-\frac{11}{3}; -3\right\} \\ (2x-1)(3x+11) &= (x+3)(6x-13) \\ 6x^2 + 22x - 3x - 11 &= 6x^2 - 13x + 18x - 39 \quad || -6x^2 \\ 19x - 11 &= 5x - 39 \quad || -5x + 11 \\ 14x &= -28 \quad || :14 \\ x &= -2\end{aligned}$$

Im Gegensatz zu früher können wir aus der letzten Zeile noch nicht schließen, dass $\{-2\}$ die Lösungsmenge unserer Ausgangsgleichung ist. Es könnte nämlich sein, dass die Zahl -2 nicht zur Definitionsmenge D der gegebenen Bruchgleichung gehört. Ein Blick auf D zeigt uns aber, dass $-2 \in D$ und dass somit tatsächlich $L = \{-2\}$ gilt. Unsere Bruchgleichung ist eindeutig lösbar.

Wir erinnern uns, dass wir aber auch schon nicht eindeutig lösbare Gleichungen kennen gelernt haben. Auch unter den Bruchgleichungen gibt es solche, wie einige der folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 2: $\frac{2-4x}{6-2x} = -\frac{2x+1}{3-x}; \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$

Beachte: Du musst das Minuszeichen der rechten Seite beim kreuzweisen Multiplizieren entweder zum Zähler oder zum Nenner nehmen! Wir entscheiden uns für den Zähler und denken uns die rechte

Seite als $\frac{-2x-1}{3-x}$ geschrieben.

$$\begin{aligned}(2-4x)(3-x) &= (6-2x)(-2x-1) \\ 6-2x-12x+4x^2 &= -12x-6+4x^2+2x \quad || -4x^2 \\ 6-14x &= -10x-6 \quad || +10x-6 \\ -4x &= -12 \quad || :(-4) \\ x &= 3\end{aligned}$$

Da $3 \notin D$ ist, gilt $L = \{\}$. Die durch die Bruchgleichung gegebene Information ist also widersprüchlich.

Beispiel 3: $\frac{x-1}{x-2} = \frac{x-2}{x-3}; \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{2; 3\}$

$$\begin{aligned}(x-1)(x-3) &= (x-2)^2 \\ x^2 - 3x - x + 3 &= x^2 - 4x + 4 \quad || -x^2 \\ -4x + 3 &= -4x + 4 \quad || +4x - 3 \\ 0 \cdot x &= 1\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist widersprüchlich, also ist es auch die Bruchgleichung; somit gilt $L = \{\}$.

Beispiel 4: $\frac{2}{x^2} = -\frac{3}{2x}; \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$$4x = -3x^2 \quad || + 3x^2$$

$$3x^2 + 4x = 0$$

$$x(3x + 4) = 0$$

$$x = 0 \vee 3x + 4 = 0$$

$$x = 0 \vee x = -\frac{4}{3}$$

Da $0 \notin D$ ist, gilt $L = \{-\frac{4}{3}\}$.

Die durch die Bruchgleichung gegebene Information ist eindeutig.

Beispiel 5: $\frac{x}{x+1} = \frac{x^2-x}{x^2-1}; \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 1\}$

Auf das Anschreiben der Zwischenzeile mit den Produkten kann man verzichten und gleich kreuzweise ausmultiplizieren:

$$x^3 - x = x^3 - x^2 + x^2 - x \quad || - x^3$$

$$-x = -x$$

Da diese Gleichung für alle Zahlen aus D erfüllt wird, ist

$$L = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 1\}.$$

Die durch die Bruchgleichung gegebene Information ist also mehrdeutig.

Beispiel 6: $\frac{x - \frac{1}{3}}{x + \frac{1}{3}} = -3; \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$

Hier scheint die kreuzweise Multiplikation nicht möglich zu sein. Wir denken uns aber -3 als $\frac{-3}{1}$ geschrieben und können dann kreuzweise multiplizieren:

$$x - \frac{1}{3} = -3(x + \frac{1}{3})$$

$$x - \frac{1}{3} = -3x - 1 \quad || + 3x + \frac{1}{3}$$

$$4x = -\frac{2}{3} \quad || : 4$$

$$x = -\frac{1}{6}$$

Da $-\frac{1}{6} \in D$ ist, gilt $L = \{-\frac{1}{6}\}$.

Aufgaben

1. a) $\frac{1}{x} = 1$

b) $\frac{1}{x} = 2$

c) $\frac{1}{x} = 0$

d) $\frac{1}{x} = \frac{5}{3}$

2. a) $\frac{3}{2x} = 5$

b) $\frac{7}{3x} = -\frac{1}{3}$

c) $\frac{12}{5x} = \frac{8}{7}$

d) $\frac{32}{15x} = \frac{16}{45}$

$$3. \text{ a) } \frac{1}{2x-1} = 2 \quad \text{b) } \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2} \quad \text{c) } \frac{3}{5x-1} = 0$$

$$4. \text{ a) } 3 : (4x + 5) = 6 : 7 \quad \text{b) } -5 : (9 - 2x) = -1 \quad \text{c) } 3,43 : (x - 1) - 3 : 8 = 0,5$$

$$5. \text{ a) } \frac{1}{x} = \frac{1}{2x-5} \quad \text{b) } \frac{13}{1+x} = \frac{1}{7x} \quad \text{c) } \frac{23}{2x} = \frac{17}{x}$$

$$6. \text{ a) } \frac{38}{8x-11} = \frac{2}{x-11} \quad \text{b) } \frac{16}{8x-16} = \frac{8}{4x-3} \quad \text{c) } \frac{5}{9-6x} = \frac{3}{2x-3}$$

$$7. \text{ a) } \frac{5x+6}{3x-8} = 1 \quad \text{b) } \frac{16-23x}{11-5x} = 5$$

$$\text{c) } \frac{13x}{7+8x} = -1 \quad \text{d) } \frac{2x-1}{-11x} = \frac{1}{2}$$

$$8. \text{ a) } \frac{0,5x-3}{4,5-8x} = \frac{3}{4} \quad \text{b) } 1,2 = \frac{15-0,1x}{x-20}$$

$$\text{c) } \frac{24x-1}{1-36x} = -\frac{3}{5} \quad \text{d) } \frac{7x+5}{3x-5} = 2\frac{4}{7}$$

$$9. \text{ a) } (2x+6) : x = 4$$

$$\text{c) } (5x-4) : (4x+5) = 0$$

$$\text{e) } (14x+5) : (6x-1) = 7 : 3$$

$$\text{b) } (18x+5) : (3x+2) = 7$$

$$\text{d) } (4x-3) : (0,75-x) = 0$$

$$\text{f) } \frac{3}{7}x : (5x-4) = \frac{3}{25}$$

$$10. \text{ a) } \frac{2x+4}{3x-5} = \frac{5}{2}$$

$$\text{c) } \frac{9x+4}{6x+1} = \frac{8}{5}$$

$$\text{e) } \frac{32x-27}{5x+3} = \frac{3}{2}$$

$$\text{b) } \frac{5x+7}{8x+4} = \frac{7}{10}$$

$$\text{d) } \frac{13x+3}{7x+1} = \frac{15}{8}$$

$$\text{f) } \frac{17x+2}{23x-8} = \frac{18}{19}$$

$$11. \text{ a) } \frac{16}{3x-4} = \frac{22}{2x+3}$$

$$\text{c) } \frac{13}{2x-3} = \frac{11}{x+3}$$

$$\text{e) } \frac{34}{5x+9} = \frac{21}{4x+1}$$

$$\text{b) } \frac{19}{5x+4} = \frac{23}{8x-1}$$

$$\text{d) } \frac{25}{4x+1} = \frac{17}{3x-1}$$

$$\text{f) } \frac{19}{5x-6} = \frac{37}{7x+2}$$

$$12. a) \frac{3}{x-1} = \frac{5}{2-2x}$$

$$b) \frac{x+7}{x-5} = \frac{x-1}{x+3}$$

$$13. a) \frac{3x^2 - 5x + 23}{4x^2 + 3x - 8} = \frac{3}{4}$$

$$b) \frac{5x^2 - 7x + 8}{3x^2 + 2x - 20} = \frac{5}{3}$$

$$c) \frac{8x^2 - 3x + 4}{12x^2 + 5x - 13} = \frac{2}{3}$$

$$d) \frac{12x^2 - 7x + 5}{18x^2 - 11x + 9} = \frac{2}{3}$$

$$14. a) \frac{5x^2 - 5x + 8}{4x^2 + 3x + 12} = \frac{2}{3}$$

$$b) \frac{7x^2 - 3x - 15}{9x^2 + x - 25} = \frac{3}{5}$$

$$c) \frac{13x^2 - 5x + 28}{3x^2 + 7x + 35} = \frac{4}{5}$$

$$d) \frac{17x^2 - x - 28}{13x^2 + 12x - 36} = \frac{7}{9}$$

$$15. a) \frac{3x-5}{7-4x} = \frac{6x-11}{15-8x}$$

$$b) \frac{7x+5}{15x-11} = \frac{7x-5}{15x-27}$$

$$c) \frac{12x+3}{5x-3} = \frac{24x-9}{10x-11}$$

$$d) \frac{8x-7}{6x+7} = \frac{12x-19}{9x+2}$$

$$16. a) \frac{9x-25}{5x-10} = \frac{7x-5}{4x-2}$$

$$b) \frac{6x-18}{7x+24} = \frac{11x-3}{13x+4}$$

$$c) \frac{9x-51}{5x-9} = \frac{7x+17}{4x+3}$$

$$d) \frac{5x-24}{3x+32} = \frac{7x+6}{9x-8}$$

$$17. a) \frac{x}{2x+3} = \frac{x}{2x-3}$$

$$b) \frac{6x}{7x-3} = \frac{6x-3}{7x}$$

$$c) \frac{x+1}{x+2} = \frac{x+3}{x+4}$$

$$d) \frac{x-5}{5x+3} = \frac{17-x}{1-5x}$$

$$18. a) \frac{5x+13}{2x+8} = \frac{15x+1}{6x}$$

$$b) \frac{3x-6}{x+5} = \frac{9x+1}{3x-2}$$

$$c) \frac{11x-8}{21-2x} = \frac{5-22x}{4x-2}$$

$$d) \frac{18x}{2x-27} = \frac{9x+7}{x-10}$$

$$e) \frac{0,8x+2}{2,5x+1} = \frac{4,8x+0,1}{15x-22}$$

$$f) \frac{\frac{x}{3}-1,1}{2x-3,75} = \frac{0,25-1,5x}{11-9x}$$

$$19. a) \frac{x}{3-x} = \frac{x}{x-3}$$

$$b) \frac{x}{x+2} = \frac{3x}{x-2}$$

$$c) \frac{x}{x-2} = \frac{x}{4-2x}$$

$$20. a) \frac{13x}{5-8x} - \frac{5x}{2x-1} = 0$$

$$b) \frac{5x}{3x-1,2} + \frac{3x}{5x-2} = 0$$

$$21. \text{ a) } \frac{2x-6}{x-3} = \frac{4x-4}{3x+1}$$

$$\text{b) } \frac{x+3}{3x-5} - \frac{8x-3}{3x+5} = 0$$

$$22. \text{ a) } \frac{6-2x}{x-3} = \frac{3x-6}{2-x}$$

$$\text{b) } \frac{3x+20}{2x+5} + \frac{15x-35}{5-x} = 0$$

$$\text{23. a) } \frac{2x+1}{3} \cdot \frac{2}{x} = \frac{5}{2x} \cdot \frac{3+2x}{4}$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \frac{2x}{x^2-1} = 1$$

$$\text{24. a) } \frac{4x-x^2}{x-1} \cdot \frac{2-2x}{3x} = 6$$

$$\text{b) } \left(\frac{3x+1}{2x} + \frac{3x+1}{3x} \right) \cdot \frac{x-1}{6x+2} = \frac{5}{x}$$

$$\text{25. a) } \frac{3x^2-5x}{x+1} \cdot \frac{1-x^2}{x} = 0$$

$$\text{b) } \frac{2x+1}{2x} \cdot \frac{x^2+x}{4x^2-1} = 1$$

$$\text{26. a) } \frac{2x+4}{x^2+2x} \cdot \frac{5x}{8-2x^2} = -1$$

$$\text{b) } \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x} \right) \cdot \frac{x-2}{x+2} = \frac{x}{2} \left(\frac{4}{x} - \frac{12}{x^2} \right)$$

$$\text{27. } \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$$

$$\text{28. } \frac{\frac{x-1}{x^2-4}}{\frac{x}{x+2} - \frac{x}{x-2}} = \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{2x}{x-1} - \frac{2x}{x+1}}$$

$$\text{29. } \frac{\frac{2}{3x+2\frac{1}{4}} + 2}{2x - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{6x+4\frac{1}{2}} + 2\frac{1}{2}}{2x - \frac{1}{4}}$$

3.2 Multiplizieren mit dem Hauptnenner

Nun wenden wir uns schwierigeren Bruchgleichungen zu, bei denen das kreuzweise Multiplizieren nicht mehr so ohne weiteres möglich ist. Hier können wir die Bruchterme dadurch beseitigen, dass wir die Gleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren. Damit erhalten wir eine nennerfreie Gleichung. Hierzu

$$\text{Beispiel 1: } 1 + \frac{2x^2}{25-4x^2} = \frac{5x+17}{10x+25} - \frac{16+3x}{8x^2-50}$$

Hier macht schon die Bestimmung der Definitionsmenge einige Schwierigkeiten. Am einfachsten geht es, wenn wir zuerst den Hauptnenner bestimmen: