



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

Aufgaben

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83513](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83513)

Beispiel 4: $\frac{2}{x^2} = -\frac{3}{2x}; \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$$4x = -3x^2 \quad || + 3x^2$$

$$3x^2 + 4x = 0$$

$$x(3x + 4) = 0$$

$$x = 0 \vee 3x + 4 = 0$$

$$x = 0 \vee x = -\frac{4}{3}$$

Da $0 \notin D$ ist, gilt $L = \{-\frac{4}{3}\}$.

Die durch die Bruchgleichung gegebene Information ist eindeutig.

Beispiel 5: $\frac{x}{x+1} = \frac{x^2-x}{x^2-1}; \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 1\}$

Auf das Anschreiben der Zwischenzeile mit den Produkten kann man verzichten und gleich kreuzweise ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} x^3 - x &= x^3 - x^2 + x^2 - x \quad || - x^3 \\ -x &= -x \end{aligned}$$

Da diese Gleichung für alle Zahlen aus D erfüllt wird, ist

$$L = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 1\}.$$

Die durch die Bruchgleichung gegebene Information ist also mehrdeutig.

Beispiel 6: $\frac{x - \frac{1}{3}}{x + \frac{1}{3}} = -3; \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$

Hier scheint die kreuzweise Multiplikation nicht möglich zu sein. Wir denken uns aber -3 als $\frac{-3}{1}$ geschrieben und können dann kreuzweise multiplizieren:

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{3} &= -3(x + \frac{1}{3}) \\ x - \frac{1}{3} &= -3x - 1 \quad || + 3x + \frac{1}{3} \\ 4x &= -\frac{2}{3} \quad || : 4 \\ x &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Da $-\frac{1}{6} \in D$ ist, gilt $L = \{-\frac{1}{6}\}$.

Aufgaben

1. a) $\frac{1}{x} = 1$

b) $\frac{1}{x} = 2$

c) $\frac{1}{x} = 0$

d) $\frac{1}{x} = \frac{5}{3}$

2. a) $\frac{3}{2x} = 5$

b) $\frac{7}{3x} = -\frac{1}{3}$

c) $\frac{12}{5x} = \frac{8}{7}$

d) $\frac{32}{15x} = \frac{16}{45}$

$$3. \text{ a) } \frac{1}{2x-1} = 2 \quad \text{b) } \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2} \quad \text{c) } \frac{3}{5x-1} = 0$$

$$4. \text{ a) } 3 : (4x + 5) = 6 : 7 \quad \text{b) } -5 : (9 - 2x) = -1 \quad \text{c) } 3,43 : (x - 1) - 3 : 8 = 0,5$$

$$5. \text{ a) } \frac{1}{x} = \frac{1}{2x-5} \quad \text{b) } \frac{13}{1+x} = \frac{1}{7x} \quad \text{c) } \frac{23}{2x} = \frac{17}{x}$$

$$6. \text{ a) } \frac{38}{8x-11} = \frac{2}{x-11} \quad \text{b) } \frac{16}{8x-16} = \frac{8}{4x-3} \quad \text{c) } \frac{5}{9-6x} = \frac{3}{2x-3}$$

$$7. \text{ a) } \frac{5x+6}{3x-8} = 1 \quad \text{b) } \frac{16-23x}{11-5x} = 5$$

$$\text{c) } \frac{13x}{7+8x} = -1 \quad \text{d) } \frac{2x-1}{-11x} = \frac{1}{2}$$

$$8. \text{ a) } \frac{0,5x-3}{4,5-8x} = \frac{3}{4} \quad \text{b) } 1,2 = \frac{15-0,1x}{x-20}$$

$$\text{c) } \frac{24x-1}{1-36x} = -\frac{3}{5} \quad \text{d) } \frac{7x+5}{3x-5} = 2\frac{4}{7}$$

$$9. \text{ a) } (2x+6) : x = 4$$

$$\text{c) } (5x-4) : (4x+5) = 0$$

$$\text{e) } (14x+5) : (6x-1) = 7 : 3$$

$$\text{b) } (18x+5) : (3x+2) = 7$$

$$\text{d) } (4x-3) : (0,75-x) = 0$$

$$\text{f) } \frac{3}{7}x : (5x-4) = \frac{3}{25}$$

$$10. \text{ a) } \frac{2x+4}{3x-5} = \frac{5}{2}$$

$$\text{b) } \frac{5x+7}{8x+4} = \frac{7}{10}$$

$$\text{c) } \frac{9x+4}{6x+1} = \frac{8}{5}$$

$$\text{d) } \frac{13x+3}{7x+1} = \frac{15}{8}$$

$$\text{e) } \frac{32x-27}{5x+3} = \frac{3}{2}$$

$$\text{f) } \frac{17x+2}{23x-8} = \frac{18}{19}$$

$$11. \text{ a) } \frac{16}{3x-4} = \frac{22}{2x+3}$$

$$\text{b) } \frac{19}{5x+4} = \frac{23}{8x-1}$$

$$\text{c) } \frac{13}{2x-3} = \frac{11}{x+3}$$

$$\text{d) } \frac{25}{4x+1} = \frac{17}{3x-1}$$

$$\text{e) } \frac{34}{5x+9} = \frac{21}{4x+1}$$

$$\text{f) } \frac{19}{5x-6} = \frac{37}{7x+2}$$

$$12. \text{ a) } \frac{3}{x-1} = \frac{5}{2-2x}$$

$$\text{b) } \frac{x+7}{x-5} = \frac{x-1}{x+3}$$

$$13. \text{ a) } \frac{3x^2 - 5x + 23}{4x^2 + 3x - 8} = \frac{3}{4}$$

$$\text{b) } \frac{5x^2 - 7x + 8}{3x^2 + 2x - 20} = \frac{5}{3}$$

$$\text{c) } \frac{8x^2 - 3x + 4}{12x^2 + 5x - 13} = \frac{2}{3}$$

$$\text{d) } \frac{12x^2 - 7x + 5}{18x^2 - 11x + 9} = \frac{2}{3}$$

$$14. \text{ a) } \frac{5x^2 - 5x + 8}{4x^2 + 3x + 12} = \frac{2}{3}$$

$$\text{b) } \frac{7x^2 - 3x - 15}{9x^2 + x - 25} = \frac{3}{5}$$

$$\text{c) } \frac{13x^2 - 5x + 28}{3x^2 + 7x + 35} = \frac{4}{5}$$

$$\text{d) } \frac{17x^2 - x - 28}{13x^2 + 12x - 36} = \frac{7}{9}$$

$$15. \text{ a) } \frac{3x-5}{7-4x} = \frac{6x-11}{15-8x}$$

$$\text{b) } \frac{7x+5}{15x-11} = \frac{7x-5}{15x-27}$$

$$\text{c) } \frac{12x+3}{5x-3} = \frac{24x-9}{10x-11}$$

$$\text{d) } \frac{8x-7}{6x+7} = \frac{12x-19}{9x+2}$$

$$16. \text{ a) } \frac{9x-25}{5x-10} = \frac{7x-5}{4x-2}$$

$$\text{b) } \frac{6x-18}{7x+24} = \frac{11x-3}{13x+4}$$

$$\text{c) } \frac{9x-51}{5x-9} = \frac{7x+17}{4x+3}$$

$$\text{d) } \frac{5x-24}{3x+32} = \frac{7x+6}{9x-8}$$

$$17. \text{ a) } \frac{x}{2x+3} = \frac{x}{2x-3}$$

$$\text{b) } \frac{6x}{7x-3} = \frac{6x-3}{7x}$$

$$\text{c) } \frac{x+1}{x+2} = \frac{x+3}{x+4}$$

$$\text{d) } \frac{x-5}{5x+3} = \frac{17-x}{1-5x}$$

$$18. \text{ a) } \frac{5x+13}{2x+8} = \frac{15x+1}{6x}$$

$$\text{b) } \frac{3x-6}{x+5} = \frac{9x+1}{3x-2}$$

$$\text{c) } \frac{11x-8}{21-2x} = \frac{5-22x}{4x-2}$$

$$\text{d) } \frac{18x}{2x-27} = \frac{9x+7}{x-10}$$

$$\text{e) } \frac{0,8x+2}{2,5x+1} = \frac{4,8x+0,1}{15x-22}$$

$$\text{f) } \frac{\frac{x}{3}-1,1}{2x-3,75} = \frac{0,25-1,5x}{11-9x}$$

$$19. \text{ a) } \frac{x}{3-x} = \frac{x}{x-3}$$

$$\text{b) } \frac{x}{x+2} = \frac{3x}{x-2}$$

$$\text{c) } \frac{x}{x-2} = \frac{x}{4-2x}$$

$$20. \text{ a) } \frac{13x}{5-8x} - \frac{5x}{2x-1} = 0$$

$$\text{b) } \frac{5x}{3x-1,2} + \frac{3x}{5x-2} = 0$$

$$21. \text{ a) } \frac{2x-6}{x-3} = \frac{4x-4}{3x+1}$$

$$\text{b) } \frac{x+3}{3x-5} - \frac{8x-3}{3x+5} = 0$$

$$22. \text{ a) } \frac{6-2x}{x-3} = \frac{3x-6}{2-x}$$

$$\text{b) } \frac{3x+20}{2x+5} + \frac{15x-35}{5-x} = 0$$

$$\text{23. a) } \frac{2x+1}{3} \cdot \frac{2}{x} = \frac{5}{2x} \cdot \frac{3+2x}{4}$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \frac{2x}{x^2-1} = 1$$

$$\text{24. a) } \frac{4x-x^2}{x-1} \cdot \frac{2-2x}{3x} = 6$$

$$\text{b) } \left(\frac{3x+1}{2x} + \frac{3x+1}{3x} \right) \cdot \frac{x-1}{6x+2} = \frac{5}{x}$$

$$\text{25. a) } \frac{3x^2-5x}{x+1} \cdot \frac{1-x^2}{x} = 0$$

$$\text{b) } \frac{2x+1}{2x} \cdot \frac{x^2+x}{4x^2-1} = 1$$

$$\text{26. a) } \frac{2x+4}{x^2+2x} \cdot \frac{5x}{8-2x^2} = -1$$

$$\text{b) } \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x} \right) \cdot \frac{x-2}{x+2} = \frac{x}{2} \left(\frac{4}{x} - \frac{12}{x^2} \right)$$

$$\text{27. } \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$$

$$\text{28. } \frac{\frac{x-1}{x^2-4}}{\frac{x}{x+2} - \frac{x}{x-2}} = \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{2x}{x-1} - \frac{2x}{x+1}}$$

$$\text{29. } \frac{\frac{2}{3x+2\frac{1}{4}} + 2}{2x - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{6x+4\frac{1}{2}} + 2\frac{1}{2}}{2x - \frac{1}{4}}$$

3.2 Multiplizieren mit dem Hauptnenner

Nun wenden wir uns schwierigeren Bruchgleichungen zu, bei denen das kreuzweise Multiplizieren nicht mehr so ohne weiteres möglich ist. Hier können wir die Bruchterme dadurch beseitigen, dass wir die Gleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren. Damit erhalten wir eine nennerfreie Gleichung. Hierzu

$$\text{Beispiel 1: } 1 + \frac{2x^2}{25-4x^2} = \frac{5x+17}{10x+25} - \frac{16+3x}{8x^2-50}$$

Hier macht schon die Bestimmung der Definitionsmenge einige Schwierigkeiten. Am einfachsten geht es, wenn wir zuerst den Hauptnenner bestimmen: